Exercices résolus de mathématiques.

Suites - Combinaisons Probabilités

PRO 2

EXPRO020 – EXPRO020

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Mars 04

EXPRO020 – Liège, juillet 2002

a) Simplifier l'expression

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (1+x)^{n+k}$$

b) En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_{n+k}^j \qquad (0 \le j \le n)$$

c) Vérifier le résultat pour $n = 3$ et $j = 2$ et 3

Rappel : $C_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$

$a)$ $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (1+x)^{n+k} = (1+x)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (1+x)^k$

Or par le binôme de Newton, on remarque que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (1+x)^k = \left[1-(1+x)\right]^n$

$\rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (1+x)^{n+k} = (1+x)^n \left[1-(1+x)\right]^n = (-x)^n (1+x)^n$

$b)$ On a donc : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (1+x)^{n+k} = (-x)^n (1+x)^n \qquad (1)$

On développe $(1+x)^{n+k}$ par le binôme de Newton et le premier membre de (1) peut alors s'écrire : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (1+x)^{n+k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \sum_{i=0}^{n+k} C_{n+k}^i x^i$

Dans ce développement, le terme en x^j est : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_{n+k}^j x^j \qquad (2)$

Le deuxième membre de (1) peut lui s'écrire :

$(-x)^n (1+x)^n = (-1)^n x^n (1+x)^n = (-1)^n x^n \sum_{t=0}^{n} C_n^t x^t = (-1)^n \sum_{t=0}^{n} C_n^t x^{n+t}$

Le terme en x^j est : $(-1)^n C_n^t x^{n+t} \qquad (3) \qquad$ avec $\quad n+t=j$

<u>Premier cas</u> $\boxed{n=j}$ $\quad \rightarrow n+t=n \rightarrow t=0$

On égalise les termes en x^j des deux membres en faisant $t=0$

$(2)=(3) \rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_{n+k}^J x^J = (-1)^n C_n^0 x^n = (-1)^n x^n$

et si on fait $x=1$ $\rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_{n+k}^J x^J = (-1)^n}$

Conclusion : $\begin{cases} n \text{ pair,} & \text{la somme cherchée vaut } +1 \\ n \text{ impair,} & \text{la somme cherchée vaut } -1 \end{cases}$

<u>Deuxième cas</u> $\boxed{0 \le j < n}$

$\rightarrow$ comme $n+t=j \;\rightarrow\; t=j-n$ est négatif, or $C_n^t = 0$ si $t<0$

On égalise les termes en x^j des deux membres, et on fait $x=1$

$$(2)=(3)\rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, C_n^k C_{n+k}^J = (-1)^n\, C_n^t = 0}$$

c) Vérifications

Dans le triangle de Pascal les C_n^k sont sur une ligne et les C_{n+k}^J sur une colonne.

1) $n=3,\;\; j=2$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, C_n^k C_{n+k}^J = 1\times 1 - 3\times 6 + 3\times 10 - 1\times 15 = 0$$

2) $n=3,\;\; j=3$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, C_n^k C_{n+k}^J = 1\times 1 - 3\times 4 + 3\times 10 - 1\times 20 = -1$$

3) $n=4,\;\; j=4$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, C_n^k C_{n+k}^J = 1\times 1 - 4\times 5 + 6\times 15 - 4\times 35 + 1\times 70 = 1$$

4) $n=5,\;\; j=5$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, C_n^k C_{n+k}^J = 1\times 1 - 6\times 5 + 10\times 21 - 10\times 56 + 5\times 126 - 252 = -1$$

EXPRO021 – Liège, juillet 2004

a) Démontrer la formule

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Suggestion : On pourra éventuellement utiliser la méthode par récurrence

b) Calculer la somme des cubes des entiers multiples de 3 compris entre 32 et 62, en justifiant le résultat.

---

a) Utilisons la méthode par récurrence.

On vérifie que la formule est vraie pour $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} k^3 = \left[\frac{1\times(1+1)}{2}\right]^2 = 1$

Supposons que la formule est vraie pour n.

Démontrons qu'elle est vraie pour $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3$$

$$= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4(n+1)\right)}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

b) Les multiples de 3 sont de la forme $3k$.

Il faut faire la somme des cubes des nombres 33,36,39......60

33 est en onzième position et 60 en vingtième position.

La somme cherchée est donc :

$$S = \sum_{k=1}^{20}(3k)^3 - \sum_{k=1}^{10}(3k)^3 = 27\left[\sum_{k=1}^{20}k^3 - \sum_{k=1}^{10}k^3\right] = 27\left[\left(\frac{20\times 21}{2}\right)^2 - \left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2\right]$$

$$= 27\left(210^2 - 55^2\right) = 27(210-55)(210+55) = 1109025$$

EXPRO022 – Liège, septembre 2004.

Démontrer que, pour tout entier naturel m, on a

$$C_{2m+1}^{m} = C_{2m}^{m} + C_{2m-1}^{m-1} + \ldots\ldots + C_{m}^{0}$$

Appliquons la formule : $C_{p+1}^{m} = C_{p}^{m} + C_{p}^{m-1}$

On a : $C_{2m+1}^{m} = C_{2m}^{m} + C_{2m}^{m-1}$

$$= C_{2m}^{m} + C_{2m-1}^{m-1} + C_{2m-1}^{m-2}$$

$$= C_{2m}^{m} + C_{2m-1}^{m-1} + C_{2m-2}^{m-2} + C_{2m-2}^{m-3}$$

Et ainsi de suite jusque :

$$= C_{2m}^{m} + C_{2m-1}^{m-1} + C_{2m-2}^{m-2} + \ldots + C_{m}^{0}$$

Résolu le 5 mars 2005.

EXPRO023 – Liège, juillet 2005.

En évaluant de deux manières différentes une puissance de (1 + *i*), démontrer que

$$\sum_{k=0}^{2m} C_{4m}^{2k}\left(-1\right)^{m+k}=4^m$$

En déduire que :

$$2\left(1-C_{40}^{2}+C_{40}^{4}+C_{40}^{6}+\ldots-C_{40}^{18}\right)=2^{20}-C_{40}^{20}$$

---

a) A l'exercice PRO003, posé à Liège et à Bruxelles, on a démontré que :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^{2k}=C_n^0-C_n^2+C_n^4-\ldots\ldots=\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}\quad(1)$$

Posons : $n=4m\rightarrow(1)$ devient : $\sum_{k=0}^{4m}(-1)^k C_{4m}^{2k}=4^m\cos m\pi=4^m\left(-1\right)^m$

Ré-écrivons d'une autre façon :

$$\rightarrow\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{4m}^{2k}+\sum_{k=2m+1}^{4m}(-1)^k C_{4m}^{2k}=\left(-1\right)^m 4^m\quad(2)$$

Dans la deuxième série de termes du premier membre, on a des C_x^y avec $y>0$.

Par défintion, tous ces termes sont nuls et (2) devient :

$\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{4m}^{2k}=\left(-1\right)^m 4^m$. Il nous reste à multiplier par $\left(-1\right)^m$ pour obtenir la forme

demandée : $\rightarrow\sum_{k=0}^{2m}(-1)^{m+k} C_{4m}^{2k}=4^m$

b) Appliquons la formule dans le cas où $m=10$:

$$\sum_{k=0}^{20}(-1)^{10+k} C_{40}^{2k}=4^m\rightarrow C_{40}^0-C_{40}^2+C_{40}^4+\ldots\ldots\ldots+C_{40}^{36}-C_{40}^{38}+C_{40}^{40}=4^{10}=2^{20}$$

On peut regrouper les termes puisque $C_{40}^0=C_{40}^{40}, C_{40}^2=C_{40}^{38},\ldots\ldots$etc

sauf le terme du milieu qui est C_{40}^{20}. Donc,

$2\left(C_{40}^0-C_{40}^2+C_{40}^4-\ldots\ldots-C_{40}^{18}\right)+C_{40}^{20}=2^{20}$ et comme $C_{40}^0=1$

$$\rightarrow 2\left(1-C_{40}^2+C_{40}^4-\ldots\ldots-C_{40}^{18}\right)=2^{20}-C_{40}^{20}$$

Variante pour le point a) proposée par Christian HALBACH

$$\sum_{k=0}^{4m} C_{4m}^{k}\, i^{k} = (1+i)^{4m} = \left(\sqrt{2}\right)^{4m} cis\left(4m.\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\to C_{4m}^{0} i^{0} + C_{4m}^{1} i + C_{4m}^{2} i^{2} + C_{4m}^{3} i^{3} + C_{4m}^{4} i^{4} + \ldots . C_{4m}^{4m} i^{4m} = 4^{m}\left(\cos m\pi + i \sin m\pi\right)$$

$$\to C_{4m}^{0} - C_{4m}^{2} + C_{4m}^{4} + \ldots . C_{4m}^{4m} = 4^{m} \cos m\pi$$

$$\to \sum_{k=0}^{2m} C_{4m}^{2k} (-1)^{k} = 4^{m} (-1)^{m}$$

$$\to \sum_{k=0}^{2m} C_{4m}^{2k} (-1)^{k+m} = 4^{m}$$

Résolu le 5 mars 2005. Modifié le 2 juillet 2009 (Christian Halbach)

EXPRO024 – Liège, septembre 2006.

a) Démontrer l'égalité suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + kC_n^k + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$C_n^2 + \ldots + (k-1)C_n^k + \ldots + (n-1)C_n^n = (n-2)2^{n-1} + 1$$

---

a) La première proposition est démontrée à l'exercice : EXPRO002

b) Reprenons la première égalité :

$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots . + kC_n^k + \ldots . nC_n^n = n2^{n-1} \qquad (1)$

Soit la n$^{\text{ième}}$ ligne du triangle de Pascal dont la somme des termes vaut 2^n

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots\ldots . C_n^n = 2^n \qquad (2)$

Soustrayons (1) et (2), membre à membre, et en tenant compte que $C_n^0 = 1$

$C_n^2 + \ldots . . + (k-1)C_n^k + \ldots . + (n-1)C_n^n = n2^{n-1} - 2^n + 1 = (n-2)2^{n-1} + 1$

Résolu le 25 décembre 2006.

EXPRO025 – FACSA – ULG – Liège, septembre 2007.

Pour des entiers $n > 0$ et $p \geq 0$ on note $S(n,\ p)$ la somme des $p$ièmes puissances des entiers positifs de 1 à n inclus:

$$S(n,\ p) = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + \ldots\ldots + n^p$$

a. Démontrer que $S(n,\ 0) = n$;

$$S(n,1) = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$S(n,3) = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

b. En utilisant la formule du binôme de Newton, démontrer l'égalité

$$pS(n,\ p-1) = (n+1)^p - 1 - \sum_{k=0}^{p-2} C_p^k S(n,k)$$

valable pour tous entiers $p > 0$ et $n \leq 0$ et retrouver ainsi les égalités du point a.

c. Démontrer que $S(n,\ p-1)$ est un polynôme de degré p en la variable n dont le coefficient du terme de degré p est $1/\ p$ et dont le terme indépendant est nul.

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

La première égalité est évidente. La deuxième égalité s'obtient aisément par récurrence, ou encore en notant que

$2S(n,1) = [1+n]+[2+(n-1)]+\cdots+[(n-1)+2]+[n+1] = n(n+1)$.

La troisième égalité s'obtient aussi par récurrence. Elle est clairement vraie pour $n=1$ et, si l'égalité est vraie pour un certain n, on a

$$S(n+1,3) = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 + (n+1)^3 = \left[\frac{1}{2}(n+1)\right]^2 [n^2+4(n+1)] = \left[\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right]^2$$

La formule du binôme de Newton peut s'écrire

$$(k+1)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i k^i$$

On en tire successivement

$$(k+1)^p - k^p = \sum_{i=0}^{p-1} C_p^i k^i$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^p - k^p\right] = \sum_{i=0}^{p-1} C_p^i \sum_{k=1}^{n} k^i$$

$$(n+1)^p - 1^p = \sum_{i=0}^{p-1} C_p^i S(n,i)$$

Si $p > 0$, la somme du second membre comporte au moins un terme; en isolant le dernier terme de la somme, on obtient exactement l'égalité annoncée.

---

30 jan 08.

EXPRO026 – FACSA – ULG – Liège, juillet 2008.

Les *nombres de Catalan* interviennent fréquemment en analyse combinatoire.
Pour tout entier naturel n, le nombre c_n est défini comme le nombre de manières de placer des parenthèses dans un produit de $n+1$ facteurs; par exemple, $c_3 = 5$ puisque le produit des quatre facteurs a, b, c et d admet les cinq groupements suivants: $a(b(cd))$, $a((bc)d)$, $(ab)(cd)$, $(a(bc))d$ et $((ab)c)d$. Nous admettons sans démonstration le résultat suivant:

$$c_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} \qquad (1)$$

Démontrer que pour tout $n > 0$ on a

1. $c_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1}$;
2. $(n+1)c_n = (4n-2)c_{n-1}$;
3. $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i-1}$

Suggestion. Il n'est pas nécessaire de raisonner par récurrence; l'usage direct de la définition et du résultat (1) suffit.

Note : Eugène-Charles Catalan a été professeur à l'université de liège.

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Les points 1 et 2 sont des conséquences du résultat (1) et de la relation classique

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

D'une part, on a

$$C_{2n}^{n-1} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{n}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} \qquad \left(\text{car } (n+1)! = (n+1).n! \text{ et } (n-1)! = \frac{n!}{n}\right)$$

$$= \frac{n}{n+1}C_{2n}^n \qquad \left(\text{car } \frac{(2n)!}{n!n!} = C_{2n}^n\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)C_{2n}^n \qquad \left(\text{car } \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= C_{2n}^n - \frac{1}{n+1}C_{2n}^n = C_{2n}^n - c_n \qquad \left(\text{car } \frac{1}{n+1}C_{2n}^n = c_n\right)$$

ce qui établit le premier point.

D'autre part, on a : $\qquad (n+1)c_n = C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$

et aussi

$$(4n-2)c_{n-1} = \frac{4n-2}{n}C_{2n-2}^{n-1} \qquad \left(\text{car } c_{n-1} = \frac{1}{n-1+1}C_{2(n-1)}^{n-1}\right)$$

$$= \frac{4n-2}{n}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} \qquad \left(\text{car } C_{2n-2}^{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(2n-2-n+1)!}\right)$$

$$= \frac{(2n-1)!2}{n!(n-1)!} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{car } (4n-2).(2n-2)! = 2(2n-1).(2n-2)! = 2(2n-1)! \\ \text{et } n.(n-1)! = n!\end{array}\right)$$

$$= \frac{(2n-1)!2}{n!(n-1)!}.\frac{n}{n}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!} \qquad \left(\text{car } 2n.(2n-1)! = (2n)! \text{ et } n.(n-1)! = n!\right)$$

ce qui établit le point 2.

Le point 3 peut s'établir directement. Supposons un parenthésage de $n+1$ facteurs. L'opération la plus externe porte sur deux blocs de tailles respectives $i+1$ et $n-i$, avec $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Les deux blocs peuvent être parenthésés de respectivement c_i et c_{n-i-1} manières, d'où la relation annoncée.

---

5 juillet 08.

EXPRO027 – FPMS, Mons, 2002, Série A.

a) Quelle est la probabilité de ne jamais avoir un " 3 " en jetant n fois un dé équilibré ?

b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins une fois un " 3 " en jetant n fois un dé équilibré ?

c) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour que la probabilité d'avoir au moins une fois un " 3 " dépasse 99% ?

d) En passant aux logarithmes en base 3, donnez une borne inférieure et supérieure de n garantissant d'avoir au moins un " 3 " avec une probabilité de 99%.

Solution proposée par Steve Tumson

a)

Si le dé est équilibré, les essais sont tous indépendants, la chance de ne pas avoir un " 3 " est, pour un lancé, de :

$$P_1(3) = \frac{5}{6}$$

Si on lance les dés n fois :

$$\overline{P_n(3)} = \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right).\left(\frac{5}{6}\right)...\left(\frac{5}{6}\right)}_{\text{n fois}} \Leftrightarrow \boxed{\overline{P_n(3)} = \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

b)

La chance d'avoir au moins un "3" est le restant des chances de ne jamais en avoir :

$$P_n(3) = 1 - \overline{P_n(3)} \Leftrightarrow \boxed{P_n(3) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

c)

$$P_n(3) > 0,99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,01 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{6}\right)^n < \ln(0,01) \text{ (car la fonction "ln" est bijective)}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^{-2})}{\ln\left(\left(\frac{6}{5}\right)^{-1}\right)} \Leftrightarrow \boxed{n > \frac{2\ln(10)}{\ln(1,2)}} \text{ (la valeur numérique exacte est en fait } n = 25,25 \text{)}$$

Note : $\ln\left(\frac{5}{6}\right)^n$ est négatif, d'où un changement de sens de l'inégalité.

d)

La difficulté est ici de fournir des bornes numériques sans calculatrice de : $n = \frac{2\log_3(10)}{\log_3(1,2)}$

Il est tout d'abord facile d'approximer $\log_3(1,2)$.

* En effet, nous savons tous que la fonction "ln" n'est autre que la fonction "log en base e = 2,8 $\simeq$ 3".

Nous savons aussi que les logarithmes, en n'importe quelle base, passent par le point (1,0).

Nous pouvons donc dire que $\log_3 \simeq \ln$ au voisinage de $x = 1$, et donc que $\log_3(1,2) \simeq \ln(1,2)$.

* Nous savons aussi qu'une exponentielle, au voisinage de $x = 0$, s'approxime très bien par la fonction $x + 1$.

La fonction logarithme étant sa réciproque, il existe donc une symétrie axiale d'axe $y = x$. La fonction "ln" s'approxime donc très bien par la fonction $x - 1$ au voisinage de $x = 1$.

$\Rightarrow$ On en déduit que $\log_3(1,2) \simeq \ln(1,2) \simeq 1,2 - 1 = 0,2 = 1/5$ (valeur par EXCES)

$$\Rightarrow n \simeq \frac{2\log_3(10)}{1/5} = 10\log_3(10) \rightarrow \text{(valeur par DEFAUT)}$$

Les bornes peuvent donc se trouver comme suit :

$$n_{INF} = 10\log_3(9) < n = \frac{2\log_3(10)}{\log_3(1,2)} = \frac{2\frac{\ln(10)}{\ln 3}}{\frac{\ln(1,2)}{\ln 3}} = \frac{2\ln(10)}{\ln(1,2)} < n_{SUP} = 10\log_3(27)$$

$$\Leftrightarrow n_{INF} = 10\log_3(3^2) < n = \frac{2\ln(10)}{\ln(1,2)} < n_{SUP} = 10\log_3(3^3)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{n_{INF} = 20 < n = \frac{2\ln(10)}{\ln(1,2)} < n_{SUP} = 30}$$

EXPRO028 – FACSA – ULG – Liège, septembre 2008.

En évaluant de deux manières différentes $\left(1+x^2\right)^{2n}$, montrer que pour tout entier naturel *n*, on a :

$$C_{2n}^{n}=\left|\left(C_{2n}^{0}\right)^2-\left(C_{2n}^{1}\right)^2+\left(C_{2n}^{2}\right)^2-....+\left(C_{2n}^{2n}\right)^2\right|$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université.

Une utilisation directe de la formule du binôme de Newton donne :

$$\left(1+x^2\right)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}x^{2k}$$

en particulier, le coefficient du terme de degré $2n$ est C_{2n}^{n}

D'autre part, on a $\left(1+x^2\right)^{2n}=\left(1+ix\right)^{2n}\left(1-ix\right)^{2n}$; en appliquant la formule du binôme de Newton à chacun des deux facteurs, on obtient : $\left(1+x^2\right)^{2n}=\left(\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}\,i^k x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{2n}C_{2n}^{j}\,i^j x^j\right)$

en particulier, le coefficient du terme de degrè $2n$ est :

$$\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}i^kC_{2n}^{2n-k}\left(-i\right)^{2n-k}=\left(-1\right)^n\sum_{k=0}^{2n}\left(-1\right)^k\left(C_{2n}^{k}\right)^2 \qquad \left(\text{car } C_{2n}^{2n-k}=C_{2n}^{k}\right)$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{2n}\left(-1\right)^k\left(C_{2n}^{k}\right)^2\right|$$

Remarque : L'expression $\sum_{k=0}^{2n}\left(-1\right)^k\left(C_{2n}^{k}\right)^2$ est positive quand n est pair et négative quand n est impair

---

Le 17 septembre 2008

EXPRO029 – FACSA – ULG – Liège, juillet 2010.

Démontrer l'égalité suivante dans laquelle $n \geq 1$ est un nombre entier:

$$1C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + n^2 C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$$

Suggestion : développer $(1+x)^n$ et dériver deux fois.

Suivons les conseils.

$$(1+x)^n = C_n^0 x^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$$

Dérivons deux fois.

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \ldots + nC_n^n x^{n-1} \qquad (1)$$

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2C_n^2 + 6C_n^3 x + 12C_n^4 x + \ldots + n(n-1)C_n^n x^{n-1} \qquad (2)$$

Faisons $x = 1$ dans (1) et (2).

$$n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n \qquad (3)$$

$$n(n-1)2^{n-2} = 2C_n^2 + 6C_n^3 + 12C_n^4 + \ldots + n(n-1)C_n^n \qquad (4)$$

Additionnons (3) et (4) membre à membre.

$$n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + 16C_n^4 + \ldots + \left(n + n(n-1)\right)C_n^n$$

$$n2^{n-2}(2 + n - 1) = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + 16C_n^4 + \ldots + n^2 C_n^n$$

$$\boxed{n(n+1)2^{n-2} = C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + 16C_n^4 + \ldots + n^2 C_n^n}$$

---

10 juillet 2010