Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 0

EXTRI000 – EXTRI009

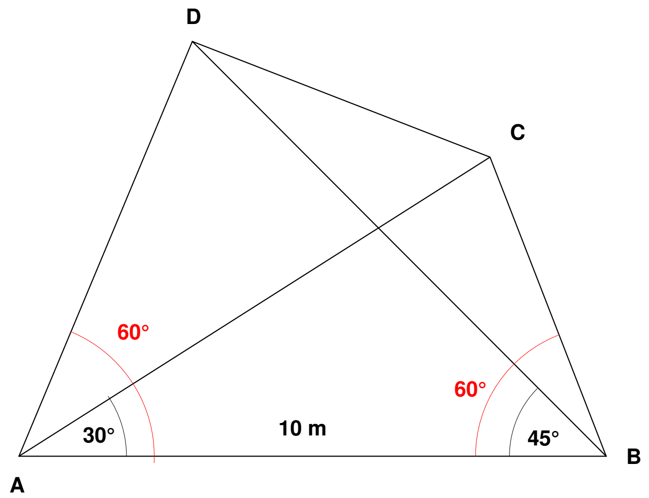
http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

30 juillet 03

EXTRI001 – Liège, septembre 2000.

Déterminer la distance entre les points C et D à partir des données fournies sur le dessin ci-après



$$* \frac{DB}{\sin 60} = \frac{AD}{\sin 45} = \frac{10}{\sin (180-60-45)} = \frac{10}{0.966} = 10.353$$

$$DB = 10.353 \times \sin 60 = 8.966m$$

$$AD = 10.353 \times \sin 45 = 7.321m$$

$$* \frac{AC}{\sin 60} = \frac{CB}{\sin 30} = \frac{10}{\sin 90} = 10$$

$$AC = 8.660\, m$$

$$CB = 5.000\, m$$

$$* DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD \times AC \cos 30$$

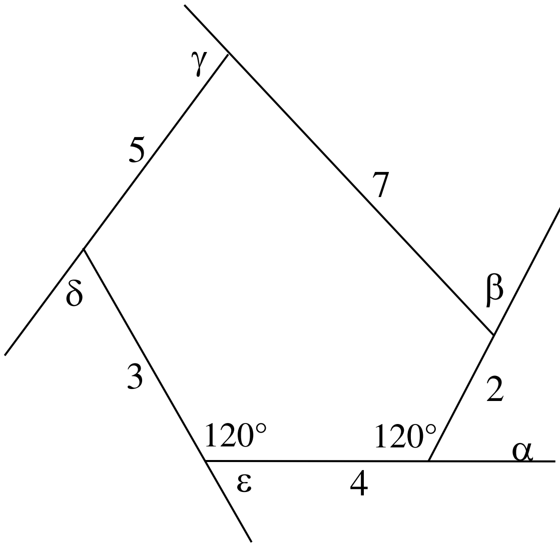
$$= 7.321^2 + 8.66^2 - 2 \times 7.321 \times 8.660 \times 0.866$$

$$= 53.597 + 74.966 - 109.80$$

$$= 18.784 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{DC = 4.334\, m}$$

EXTRI002 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1998.

Soit le pentagone donné à la figure ci-dessous. Calculer en degrés la somme des angles $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$.



La somme des angles internes d'un pentagone est égale à : $(5-2)180 = 540°$

La somme des angles externes sera donc :

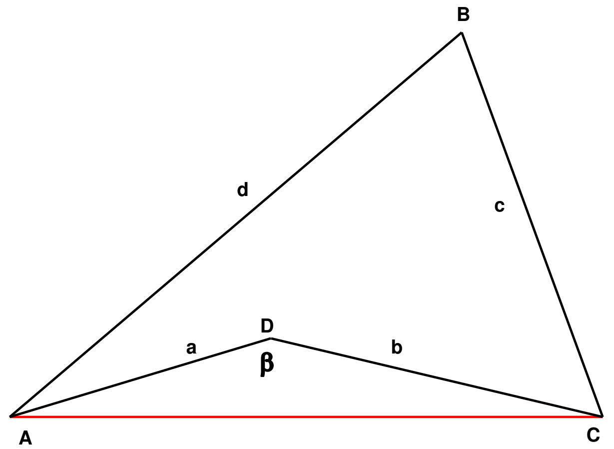
$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon &= 180-A+180-B+180-C+180-D+180-E \\ &= 5\times180-(A+B+C+D+E) \\ &= 5\times180-3\times180 = 360°.\end{aligned}$$

Autrement dit, la somme est indépendan te de la forme du pentagone, et il est inutile de se lancer dans un calcul détaillé.

Modifié le 23 août 05

EXTRI003 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 1996.

Calculer l'aire du quadrilatère non-convexe $ABCD$, sachant que $a = 40$cm ; $b =$ 50 cm ; $c =$ 60 cm ; $d = 70$ et l'angle $\beta = 150°$



Dans le triangle ABC, on a $AC^2 = 40^2 + 50^2 - 2 \times 40 \times 50 \cos 150 \quad \Rightarrow \quad AC = 87$ cm

Le demi-périmètre de ABC est $p = \dfrac{87 + 70 + 60}{2} = 108.5$ cm

Appliquons la formule de Héron : (Voir note)

$$A_{ABC} = \sqrt{108.5(108.5-70)(108.5-87)(108.5-60)} = 2087 \text{ cm}^2$$

D'autre part , on a aussi : $A_{ADC} = \dfrac{1}{2} 40 \times 50 \sin 150 = 500 \text{ cm}^2$

Et finalement :

$$A_{ABCD} = A_{ABC} - A_{ADC} = 2087 - 500 = 1587 \text{ cm}^2$$

En géométrie euclidienne, la **formule de Héron**, du nom de Héron d'Alexandrie, permet de calculer l'aire S d'un triangle quelconque en ne connaissant que les longueurs a, b et c de ses trois côtés :

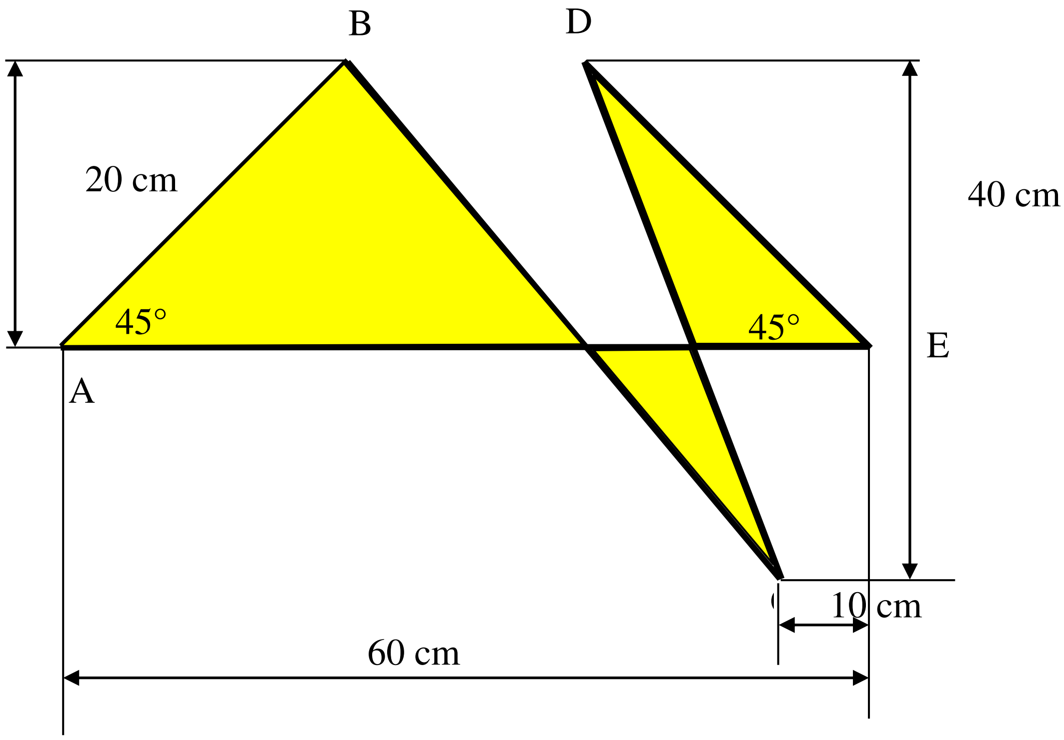
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

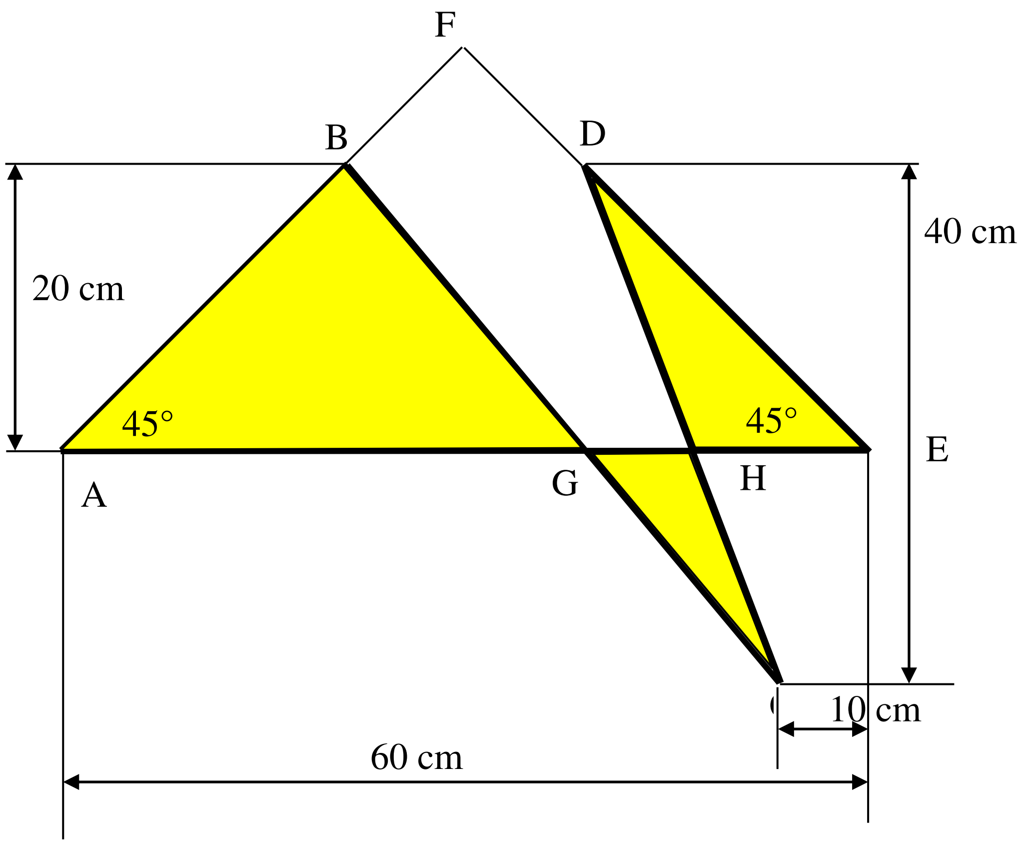
Source Wikipédia.

Modifié le 5 septembre 2018.

EXTRI004 – Liège, septembre 1997.

En se basant sur la figure ci-dessous où les angles A et E sont égaux à 45°, déterminer l'aire hachurée





L'aire recherchée S est égale à :

$$S = \Delta_{AFE} - \Delta_{BDF} - \Delta_{BCD} + 2\Delta_{CGH}$$

$$\Delta_{AFE} = \frac{1}{2}\frac{60^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 900 \text{ car } AFE \text{ est un demi carré de côté égal à } \frac{60}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta_{BDF} = \frac{1}{2}\times 20\times 10 = 100 \quad \text{car la hauteur } = \frac{60}{2} - 20 = 10 \quad et \quad BD = 2\times 10 = 20$$

$$\Delta_{BCD} = \frac{1}{2}\times 40\times 20 = 400$$

$$\Delta_{CGH} = \frac{1}{2}\times 20\times 10 = 100 \quad \text{car } GH = \frac{BD}{2} = 10 \ (\text{triangles semblables})$$

$$\rightarrow \quad \boxed{S = 600\ cm^2}$$

Note : L'information sur C (10 cm) est donc inutile.

Solution proposée par Damien Gérard

Les trois triangles ont la même hauteur. Donc, étant donné qu'on ne recherche que l'aire, on peut librement basculer les 2 triangles supérieurs en bas et faire coller leurs sommets contre le sommet du triangle que se trouve déjà en bas.

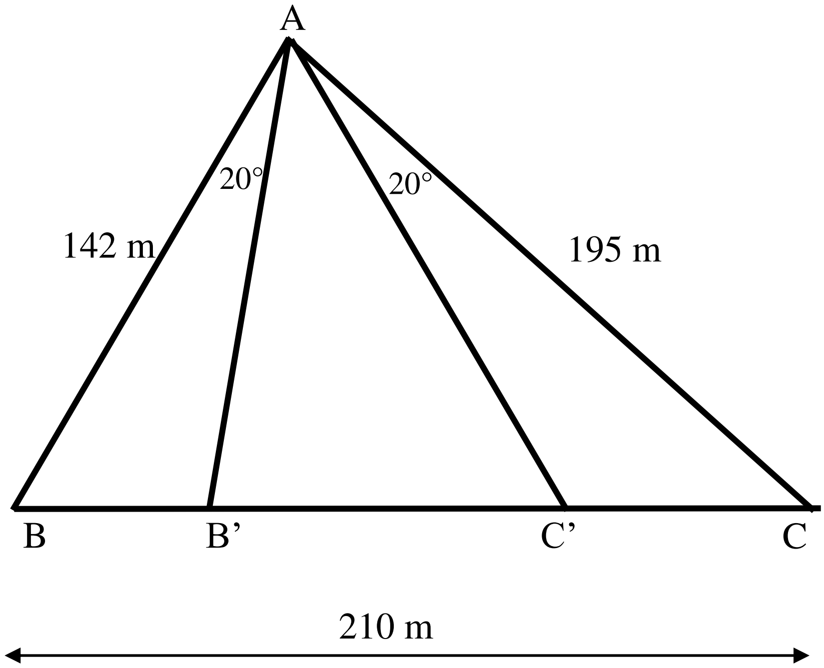
Là, on voit que ca ne donne qu'un seul gros triangle dont l'aire est

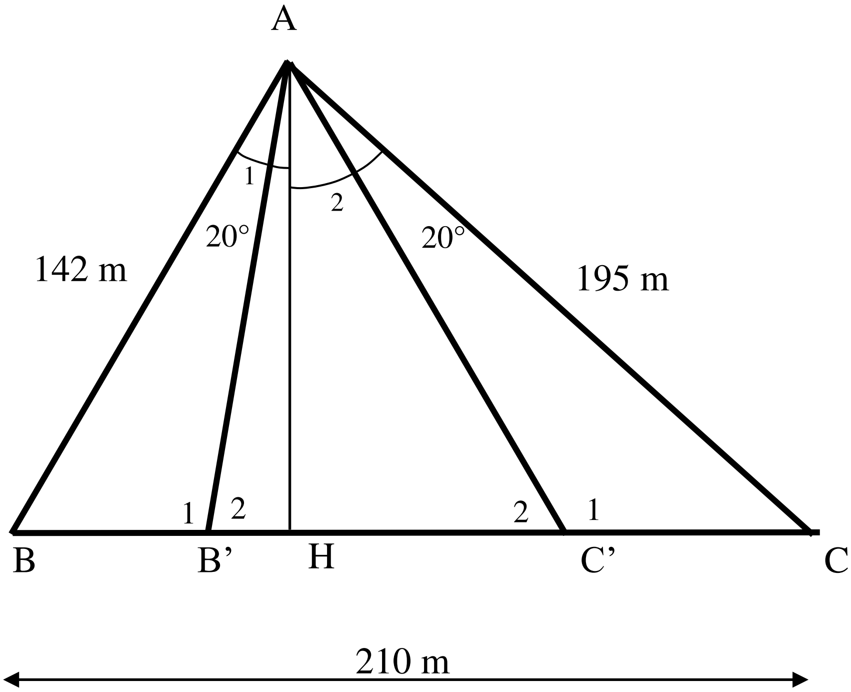
base $\times$ hauteur/2 à savoir $60\times 20/2$=600 cm^2

Modifié le 22 août 2005. Modifié le 28 juin 06 (Damien Gérard)

EXTRI005 – Liège, juillet 2000.

On donne un triangle ABC dont les longueurs sont connues. Par le sommet A, à l’intérieur du triangle, on mène deux segments de droites | A, B’ | et | A, C’| formant avec | A, B | et | A, C | des angles des 20 degrés, tels que B’ et C’ appartiennent au côté | A, C |. (voir figure ci-après).
Calculer la surface du triangle AB’C’





$\Delta ABC \quad : \quad 1) \quad 210^2 = 142^2 + 195^2 - 2 \times 142 \times 195 \times \cos A$

$$\rightarrow \quad A = 75.26° \quad \rightarrow \quad \overset{\frown}{B'AC'} = 35{,}26°$$

$2) \quad 142^2 = 210^2 + 195^2 - 2 \times 210 \times 195 \times \cos C$

$$\rightarrow \quad C = 40.8395° \quad \rightarrow \quad B = 63.9005°$$

$$\rightarrow \quad C'_1 = 119.1605° \quad C'_2 = 60.8395° \quad B'_1 = 96.0995° \quad B'_2 = 83.9005°$$

$A_2 = 90 - C = 90 - 40.8395 = 49.1605°$

$AH = 195 \cos 49.1605 = 127.52$

$$AC' = \frac{AH}{\sin\ C'_2} = \frac{127.52}{\sin\ 60.8395} = 143.95$$

$$AB' = \frac{AH}{\sin\ B'_2} = \frac{127.52}{\sin\ 83.9005} = 128.246$$

$$Aire\ AB'C' = \frac{1}{2} AB' . AC' \sin \overset{\frown}{B'AC'} = \frac{1}{2} \times 145.95 \times 128.246 \times \sin\ 35.26$$

$$\rightarrow \quad \boxed{A_{AB'C'} = 5403\, m^2}$$

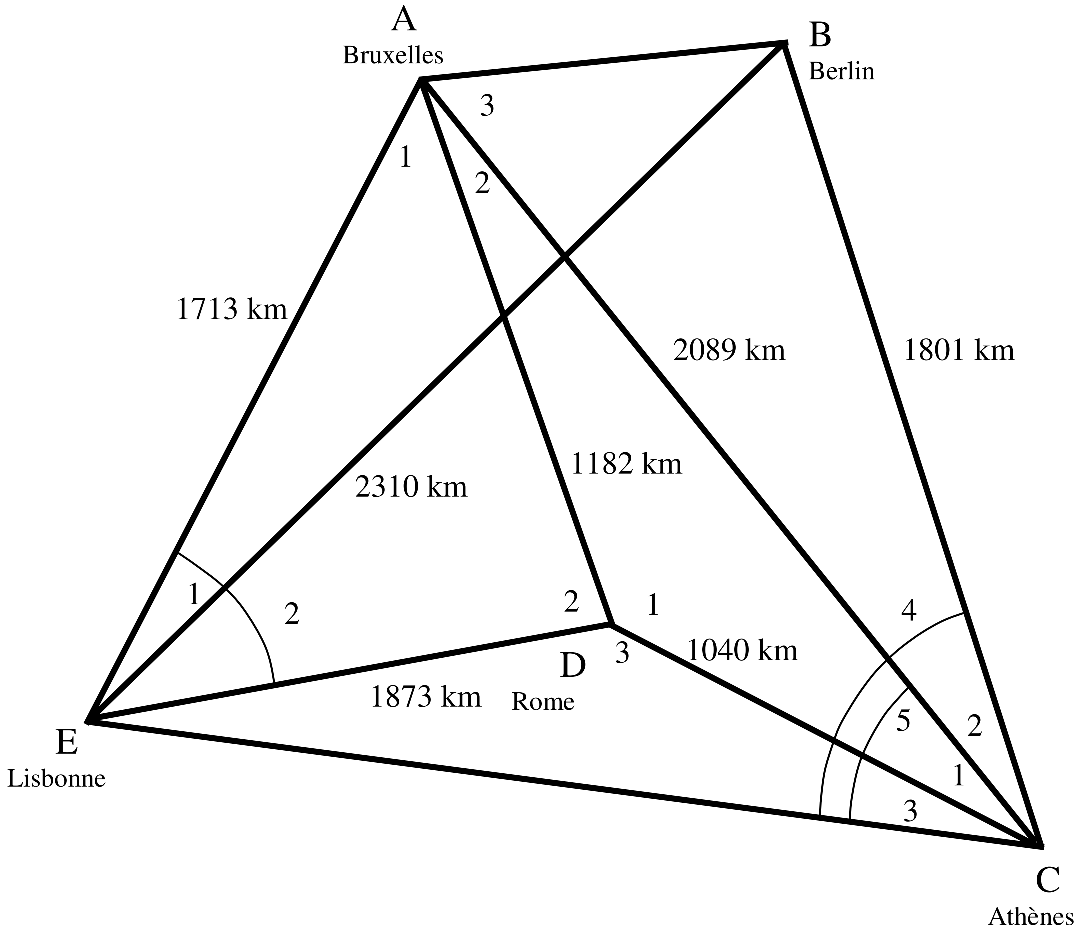
EXTRI006 – Liège, juillet 1999.

Connaissant les distances suivantes

Bruxelles - Lisbonne	1713 km
Athènes – Bruxelles	2089 km
Berlin – Lisbonne	2310 km
Athènes – Berlin	1801 km
Bruxelles – Rome	1182 km
Lisbonne – Rome	1873 km
Athènes – Rome	1040 km

Calculer la distance Berlin – Bruxelles.

Suggestion : utiliser uniquement les formules de calcul d'angles ou de côtés dans des triangles, après avoir représenté graphiquement la situation géographique des villes.



$$\Delta\, ADE \quad \rightarrow \quad 1182^2 = 1713^2 + 1873^2 - 2\times 1713\times 1873\times \cos E_2 \quad \rightarrow \quad E_2 = 38.1623°$$

$$\sin A_1 = \frac{1873}{1182}\sin E_2 \quad \rightarrow \quad A_1 = 78.2682°$$

$$\sin D_2 = \frac{1713}{1182}\sin E_2 \quad \rightarrow \quad D_2 = 63.5691°$$

$$\Delta\, ACD \quad \rightarrow \quad 1040^2 = 2089^2 + 1182^2 - 2\times 2089\times 1182\times \cos A_2 \quad \rightarrow \quad A_2 = 18.6347°$$

$$\sin D_1 = \frac{2089}{1040}\sin A_2 \quad \rightarrow \quad D_1 = 140.0664°$$

$$\sin C_1 = \frac{1182}{1040}\sin A_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = 21.2968°$$

$$\Delta\, ECD \quad \rightarrow \quad D_3 = 360 - 63.5691 - 140.0664 = 156.3645°$$

$$EC^2 = 1873^2 + 1040^2 - 2\times 1873\times 1040\times \cos 156.3645$$

$$\rightarrow \quad EC = 2856.3551$$

$$1873^2 = 2856.3551^2 + 1040^2 - 2\times 2856.3551\times 1040\times \cos C_3$$

$$\rightarrow \quad C_3 = 15.2418°$$

$$\Delta\, BCE \quad \rightarrow \quad 2310^2 = 2856.3551^2 + 1801^2 - 2\times 2856.3551\times 1801\times \cos C_4$$

$$\rightarrow \quad C_4 = 53.8706°$$

$$\Delta\, ABC \quad \rightarrow \quad C_2 = C_4 - C_3 - C_1 = 53.8706 - 15.2418 - 21.2968 = 17.3320°$$

$$AB^2 = 2089^2 + 1801^2 - 2\times 2089\times 1801\times \cos 17.3320$$

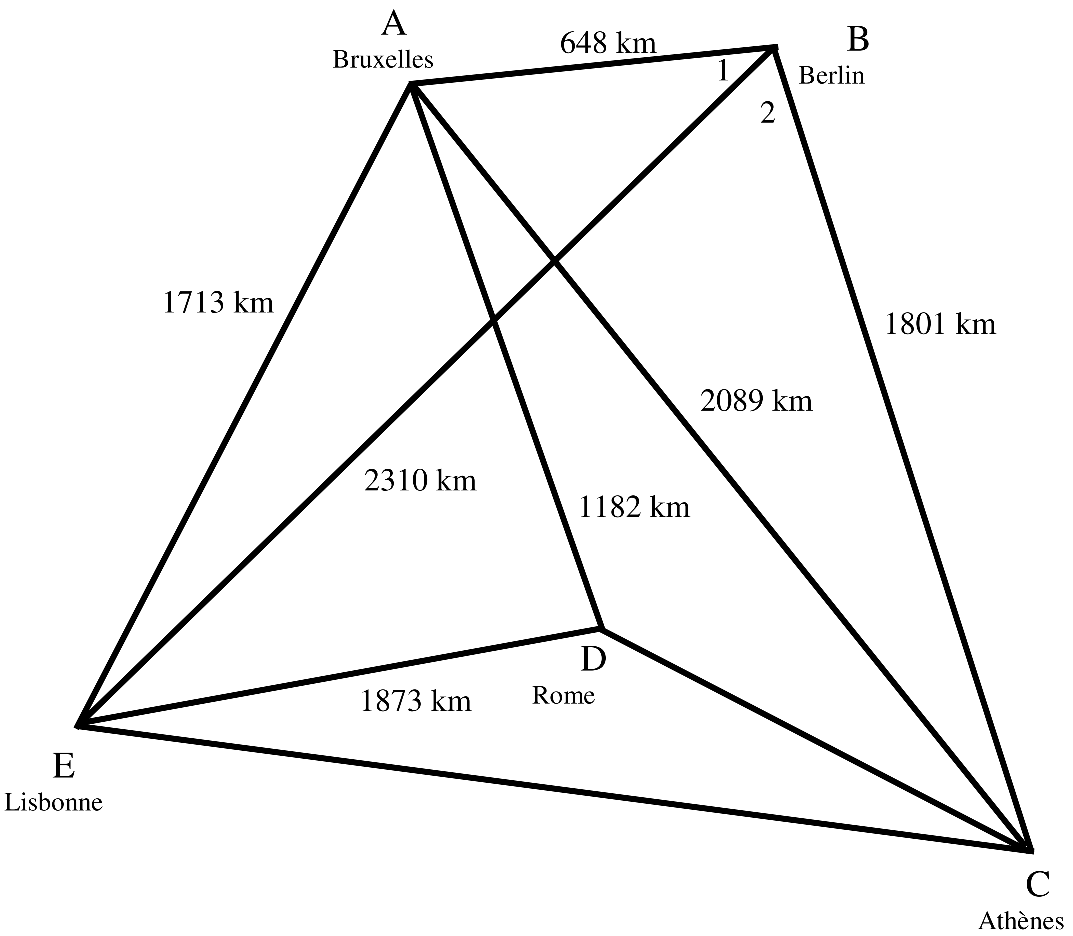
$$\boxed{AB = 651\, km}$$

EXTRI007 – Liège, septembre 1999.

Connaissant les distances suivantes

Bruxelles – Berlin	648 km
Bruxelles - Lisbonne	1713 km
Bruxelles – Rome	1182 km
Bruxelles - Athènes	2089 km
Lisbonne - Berlin	2310 km
Lisbonne – Rome	1873 km
Berlin - Athènes	1801 km

Calculer l'aire du quadrilatère Bruxelles – Berlin - Athènes - Lisbonne.



Le quadrilatère recherché est la somme des triangles :
Bruxelles - Berlin - Athènes et Bruxelles - Lisbonne - Berlin

$$\widehat{\mathrm{A}} = \text{arc cos}\,\frac{2310^2 - 648^2 - 1713^2}{-2 \times 648 \times 1717} = 153.2139°$$

$$\widehat{B}_1 = \text{arc cos}\,\frac{1713^2 - 2310^2 - 648^2}{-2 \times 2310 \times 648} = 19.5233°$$

$$\widehat{B} = \text{arc cos}\,\frac{2089^2 - 648^2 - 1801^2}{-2 \times 648 \times 1801} = 107.4624°$$

$$\widehat{B}_2 = 107.4624 - 19.5233 = 87.9391°$$

$$S = \frac{1}{2} \times 1713 \times 648 \times \sin 153.2139 + \frac{1}{2} \times 2310 \times 1801 \times \sin 87.9391$$

$$\boxed{S = 2\,328\,931.8\ km^2}$$

EXTRI008 – Liège, juillet 1998.

Soit le quadrilatère ABCD donné par les longueurs de ses côtés et d'une de ses diagonales (figure 1)

a) calculer en degrés les angles indiqués sur la figure 1
b) calculer la surface du quadrilatère.
c) calculer le rapport entre, d'une part, la distance du point D au centre du cercle circonscrit au triangle ABC et , d'autre part, le rayon de ce cercle.
d) calculer le rapport entre, d'une part, la distance du point C au centre O du cercle circonscrit au triangle ABD et d'autre part, le rayon de ce cercle (figure 2).

Le rayon du cercle circonscrit à un triangle est donné par la formule R = abc/4S où S est la surface du triangle et a, b, c les longueurs des côtés.

Suggestion : calculer R, μ puis dans le triangle BOC, calculer la longueur du segment | O, C |. (Figure 2)

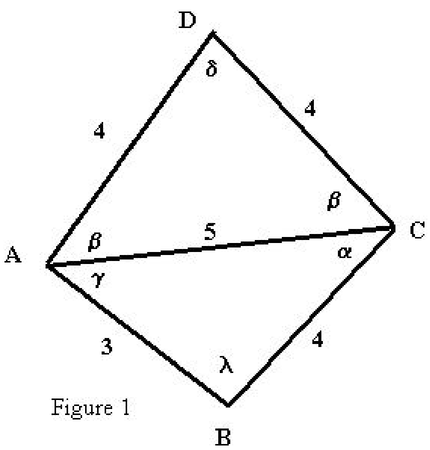


Figure 1

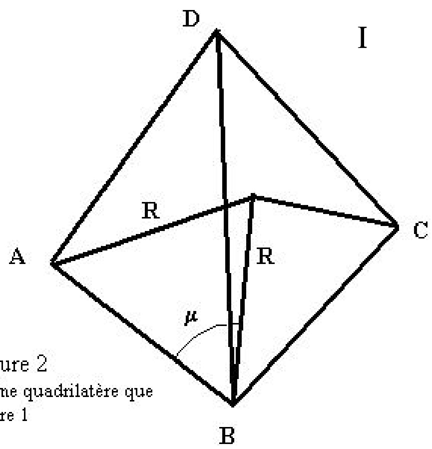
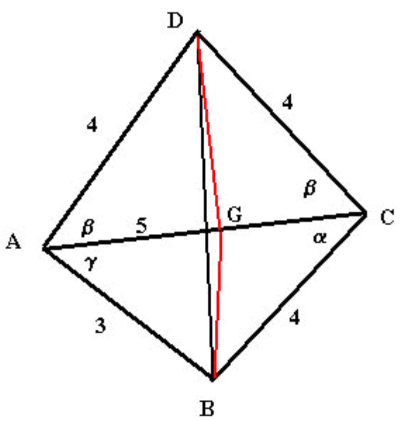


Figure 2
Même quadrilatère que figure 1



$a)\quad \Delta\, ADC \quad\rightarrow\quad 4^2 = 4^2 + 5^2 - 2\times 4\times 5\times \cos\beta \rightarrow \boxed{\beta = 51.3178°}$

$\rightarrow \boxed{\delta = 77.3644°}$

$\Delta\, ABC \quad (3, 4, 5)\ est\ un\ triplet\ pythagoricien \quad\rightarrow\quad \Delta\, ABC\ est\ rectangle$

$\rightarrow \boxed{\lambda = 90°} \quad\rightarrow\ \alpha = \text{arc cos}\,\dfrac{4}{5}$

$\rightarrow \boxed{\alpha = 36.8699°}\quad et\quad \boxed{\gamma = 53.1301°}$

$b)\quad S = \dfrac{1}{2}\times 4^2 \times \sin^2 77.3644° + \dfrac{1}{2}\times 3\times 4 \qquad \boxed{S = 13.8062}$

$c)\quad Le\ centre\ du\ cercle\ circonscrit\ au\ \Delta\ rectangle\ ABC, est\ situé\ en\ G\ milieu\ de\ AC$

$\Delta\, DGC\ est\ rectangle \ \rightarrow\ DG^2 = 4^2 - 2.5^2 \quad\rightarrow\quad DG = 3.1225$

$\dfrac{DG}{R} = \dfrac{3.1225}{2.5} \quad\rightarrow\quad \boxed{\dfrac{DG}{R} = 1.2490}$

$d)\quad DB^2 = 4^2 + 3^2 - 2\times 4\times 3\times \cos\left(51.3178 + 53.1301\right)$

$DB = 5.5667$

$$R_{ABD} = \frac{4\times 3\times 5.5667}{4\times \frac{1}{2}\times 4\times 3\times \sin\left(51.3178+53.1301\right)} = 2.8742$$

$$\mu = \text{arc cos}\,\frac{2.8742^2 - 2.8742^2 - 3^2}{-2\times 2.8742\times 3\times \cos\mu} = 58.5413°$$

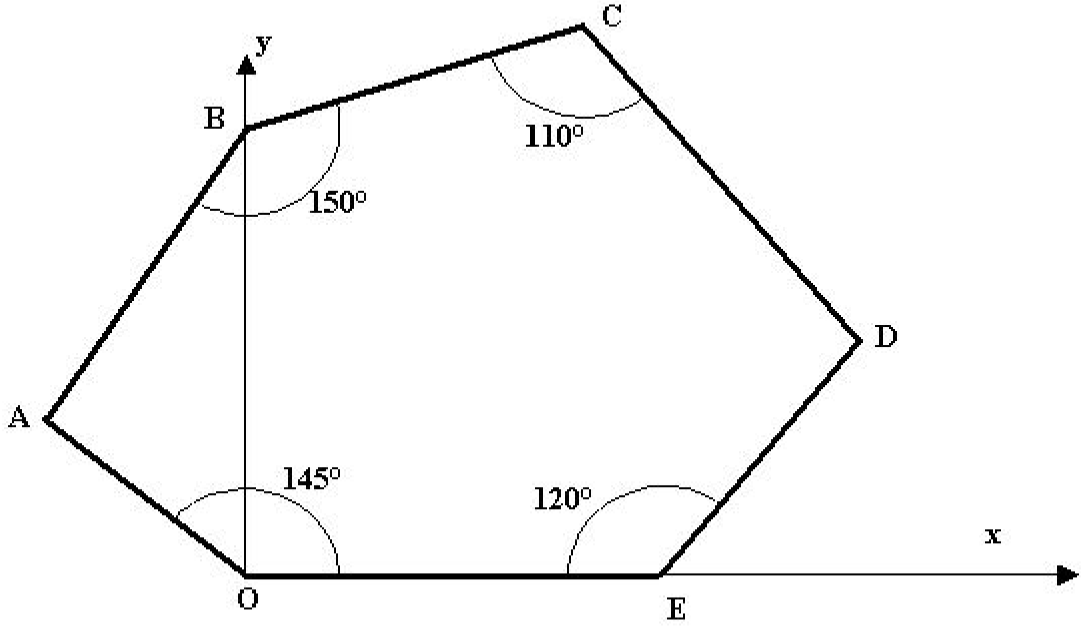
$OC^2 = 4^2 + 2.8742^2 - 2\times 4\times 2.8742\times \cos\left(90 - 58.5413\right)$

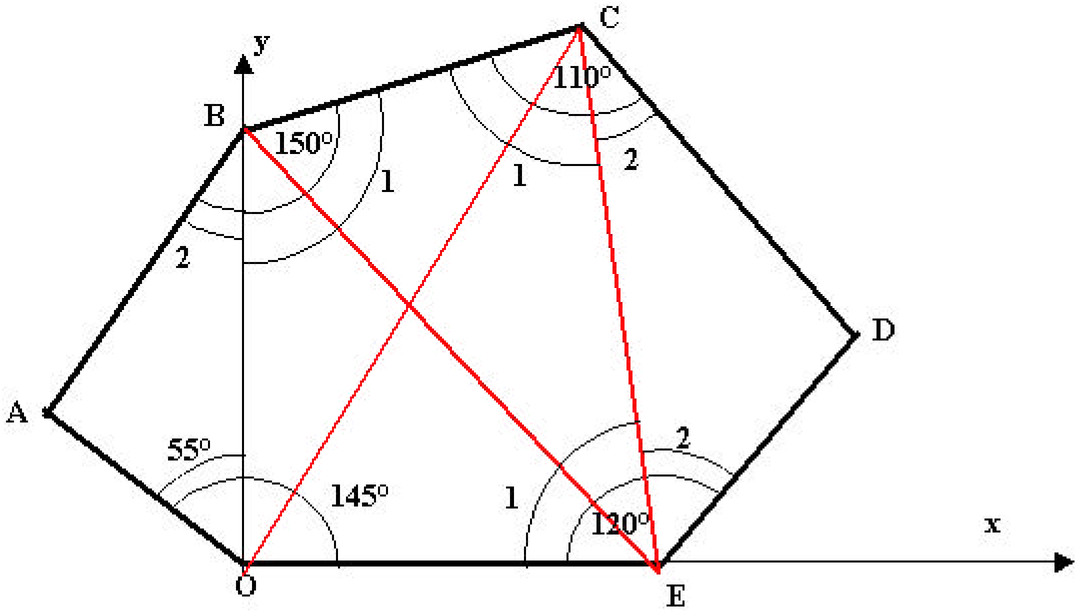
$OC = 3.5290$

$$\boxed{\frac{OC}{R} = \frac{3.5290}{2.8742} = 1.227}$$

EXTRI009 – Liège, juillet 1997.

Considérons un repère Oxy dans lequel les coordonnées des points B, C et E sont B(0, 4), C(3.5, 5), E(5, 0). Toutes les données de position sont exprimées en centimètres.
Déterminer l'aire de l'hexagone défini à la figure ci-dessous où les angles O, B, C et E sont respectivement égaux à 145°, 150°, 110° et 120°.





Calculons les distances :

$$OB = 4$$

$$OE = 5$$

$$BC = \sqrt{(3.5-0)^2 + (4-5)^2} = 3.6401$$

de même

$$OC = 6.1033$$

$$BE = 6.4031$$

$$EC = 5.2202$$

On a :

$$B_1 = \arccos \frac{6.1033^2 - 3.6401^2 - 4^2}{-2 \times 3.6401 \times 4} = 105.9519° \quad \rightarrow \quad B_2 = 44.0532°$$

$$C_1 = \arccos \frac{6.4031^2 - 5.2202^2 - 3.6401^2}{-2 \times 5.2202 \times 3.6401} = 90.7521° \quad \rightarrow \quad C_2 = 19.2479°$$

$$E_1 = \arccos \frac{6.1033^2 - 5^2 - 5.2202^2}{-2 \times 5 \times 5.2202} = 73.3007° \quad \rightarrow \quad E_2 = 46.6993°$$

Donc $A = 80.9468°$ *et* $D = 114.0532°$

$$AB = 4 \frac{\sin 55}{\sin 80.9468} = 3.3179$$

$$CD = 5.2202 \frac{\sin 46.6993}{\sin 114.0532} = 4.1603$$

Donc

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 3.3179 \times \sin 44.0532$$

$$+ \frac{1}{2} \times 4 \times 5$$

$$+ \frac{1}{2} \times 3.6401 \times 5.2202 \times \sin 90.7521$$

$$+ \frac{1}{2} \times 5.2202 \times 4.1603 \times \sin 19.2479$$

$$\boxed{S = 27.6939 \ cm^2}$$