Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 10

EXTRI100-EXTRI109

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Janvier 04

EXTRI100 – Louvain, juillet 2000.

Résoudre l'équation en x suivante

$$\cos 5x = 2\sin x \sin 2x\left(5-8\cos^2 x\right)+\cos 3x$$

et présenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\cos 5x = 2\sin x \sin 2x\left(5-8\cos^2 x\right)+\cos 3x$$

$$\cos 5x-\cos 3x = 2\sin x \sin 2x\left(5-8\cos^2 x\right)$$

$$-2\sin 4x \sin x = 2\sin x \sin 2x\left(5-8\cos^2 x\right)$$

1) $\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = k\pi}$

Il reste : $-\sin 4x = \sin 2x\left(5-8\cos^2 x\right)$

$\Rightarrow \; -2\sin 2x \cos 2x = \sin 2x\left(5-8\cos^2 x\right)$

2) $\sin 2x = 0 \; \rightarrow \; \boxed{x = \dfrac{\pi}{2}+k\pi}$

Il reste : $-2\cos 2x = 5-8\cos^2 x$

$\Rightarrow \; -2\cos^2 + 2\sin^2 x = 5-8\cos^2 x$

$\Rightarrow \; 2\sin^2 x + 6\cos^2 x = 5$

$\Rightarrow \; 2\sin^2 x + 2\cos^2 x + 4\cos^2 x = 5$

$\Rightarrow \; 4\cos^2 x = 3 \; \Rightarrow \; \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow \; \boxed{x = \pm\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \text{ et } x = \pm\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi}$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle.

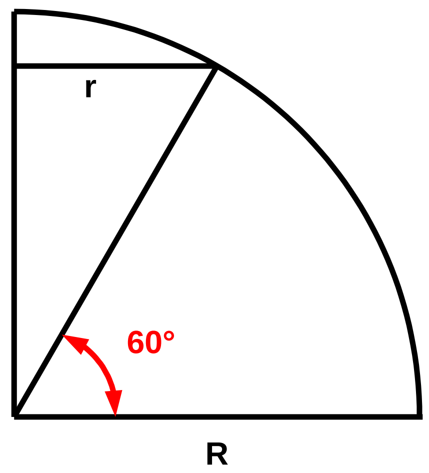
EXTRI101 – Louvain, juillet 2000.

Calculer en km la distance à la surface terrestre qui correspond

- A une différence de latitude de 1° le long d'un méridien.
- A une différence de 1° le long de l'équateur
- A une différence de longitude de 1° le long d'un parallèle à 60° de latitude nord.

On approximera la terre à une sphère parfaite dont le longueur de l'équateur vaut 40000 km.
On se rappellera que :

- La latitude est la distance angulaire d'un lieu à l'équateur, mesurée de 0° à ± 90° sur le méridien, positivement vers le nord et négativement vers le sud.
- La longitude est l'angle, compté de 0° à 180°, que forme le plan du méridien du lieu avec le plan du méridien de Greenwich pris comme référence.
- Le plan méridien d'un lieu est e plan qui asse par la verticale du lieu et par l'axe de rotation de la terre.
- Le parallèle est le cercle parallèle à l'équateur.



Distance correspondant à 1° de latitude sur un méridien : $\frac{1}{360}40000 = 111.111\ km$

Distance correspondant à 1° de longitude le long de l'équateur

= la même longueur, soit 111.111 km

Rayon de la Terre : $R = \frac{40000}{2\pi} = 6366.198\ km$

Rayon du parallèle à 60° de latitude nord : $r = R\cos 60 = \frac{R}{2} = 3183.099\ km$

Distance corrspondant à 1° de longitude le long du parallèle à 60° de longitude nord :

$$\frac{1}{360}2\pi r = \frac{1}{360}2\pi \times 3183.099 = 55.556\ km\ \left(\text{soit } \frac{111.111}{2}\right)$$

EXTRI102 – Louvain, juillet 2000.

Nous sommes en 2007, et vous êtes à bord de l'USS Ticonderoga (appelé Tico ou point T), ancien bateau de la marine des Etats-Unis, actuellement dans la Force Commune Mondiale (FCM), chargé de l'envoi de missiles aériens pour la défense de l'Europe. La terre subit une invasion d'extra-terrestres en provenance d'Alpha du Centaure. Ces êtres ne semblent pas connaître le radar, aussi votre ami Emile a-t-il pu les repérer, et vous signale l'arrivée imminente d'un objet volant, similaire à celui qui à détruit Londres mardi dernier. Il peut prévoir avec certitude son arrivée au point A situé à une distance D = 150 km du Tico. La droite AT est dans un plan vertical un angle α = 150° vers bâbord (à gauche) par rapport à l'orientation du Tico. Cette même droite AT fait un angle β = 10° par rapport à l'horizontale. L'ennemi fonce à la vitesse V_E = 1500 km/h vers la ville de Brest (pont B), objectif stratégique, située droit devant le Tico, à une distance L = 100 km de celui-ci.
Suite aux nombreuses attaques précédentes, l'ordinateur de bord n'est plus fiable, et c'est à vous de faire le calcul de la phase d'approche des missiles. Pour simplifier, nous supposerons que la terre est plate, que tous les objets se déplacent en ligne droite à vitesse constante, que Brest se trouve à l'altitude 0, et que le Tico est immobile sur la mer.
Vous disposez de missiles d'une vitesse V_M = 3000 km/h, et dont le rayon d'action est de R = 80 km au maximum, que vous pouvez lancer dans toutes les directions. On vous demande (les temps sont à donner en minutes et secondes, au 1/100 de seconde près, les distance au mètres près) :

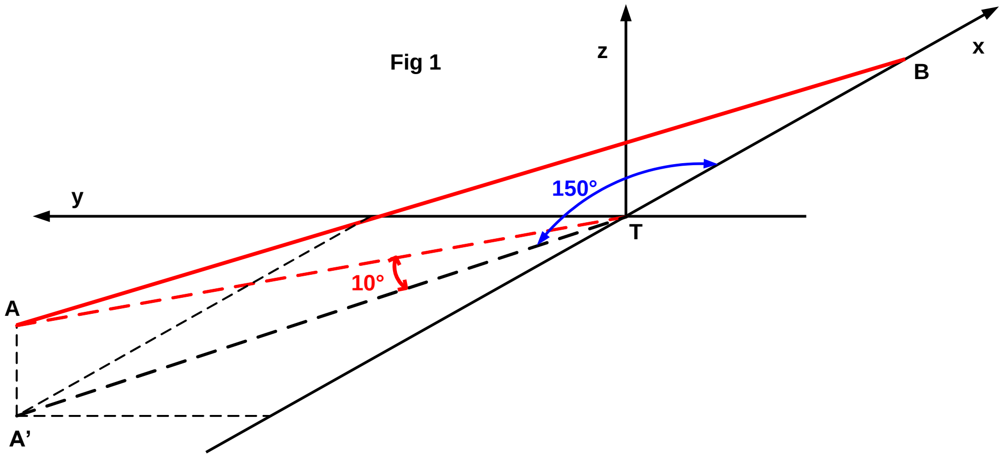
- De déterminer le temps t_1 qu'il faudrait à l'ennemi pour atteindre Brest si personne n'intervient.
- De choisir un endroit d'impact X de votre missile avec la cible, qui vous permette de tirer après le passage au point A, et qui soit dans les limites du rayon d'action de votre missile.

En fonction de ce point, vous déterminerez

- Le temps t_2 qu'il faudra à votre missile, après son envoi, pour atteindre sa cible.
- Le moment exact t_3 du tir du missile, à partir du moment où l'ennemi atteint le point A
- La direction du tir, c'est-à-dire les angles γ dans le plan horizontal, par rapport à la direction Tico, et δ dans le plan vertical, par rapport au plan de la mer,

Vu l'urgence, et pour être prêt à refaire ce calcul en dernière minute avec des données différentes, nous vous conseillons fortement de noter clairement les étapes de vos calculs, avec les différentes données qui y interviennent, ainsi que les variables intermédiaires que vous auriez calculées. Il est évident que des dessins clairs et bien annotés vous permettront de vous y retrouver plus facilement, et qu'il vaut mieux éviter les calculs inutiles. N'oubliez pas que si quelque chose vous arrivait votre collègue devrait pouvoir reprendre votre travail dans le seconde. Soyez donc clair et précis.

Fig 1



Les coordonnées de A : (Voir figures 1 et 2)

$$\left(-D\cos\beta\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right), D\cos\beta\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right), D\sin\beta\right)=(-127.93022;73.86055;26.047)$$

Distance $AB : B : (100;0;0)$

$$\overrightarrow{AB} : (227.93022;-73.86055;-26.047)=(-8.75073;\ 2.83566;\ 1)$$

$$\rightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{227.93022^2+73.8605^2=26.047^2} = 241.0104\ km$$

Temps qu'il faudrait au missile pour atteindre Brest : $t_1=\dfrac{241.0104}{1500}=0.1606736\ h = 9\min 38s\,\dfrac{42}{100}$

Les équations paramétriques de la droite AB : $\begin{cases} x=100-8.75073k \\ y=\quad +2.83566k \\ z=\quad +k \end{cases}$

Le point d'impact X doit être tel que :

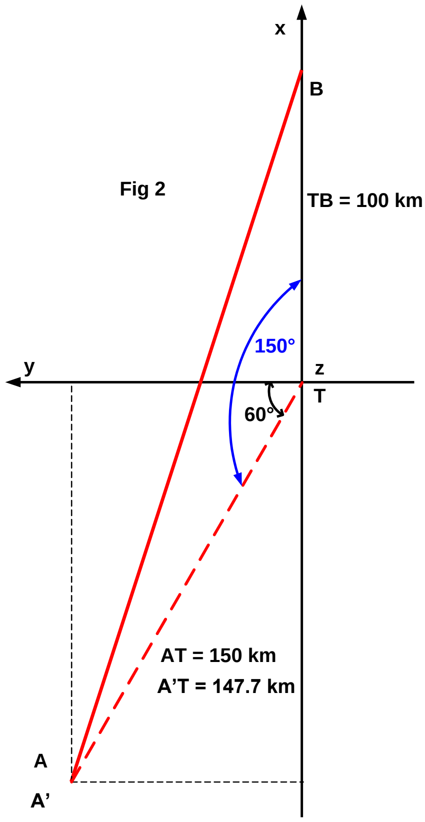
$$\left\|\overrightarrow{TX}\right\|=(100-8.75073k)^2+(2.83566k)^2+k^2\le 80^2$$

$$\rightarrow 85.61624k^2-1750.146k+3600\le 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} k_1=2.3203 \\ k_2=18.1214 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_1:(79.696;\ 6.580;\ 2.320) \\ X_2:(-58.575;\ 51.386;18.121) \end{cases}$$

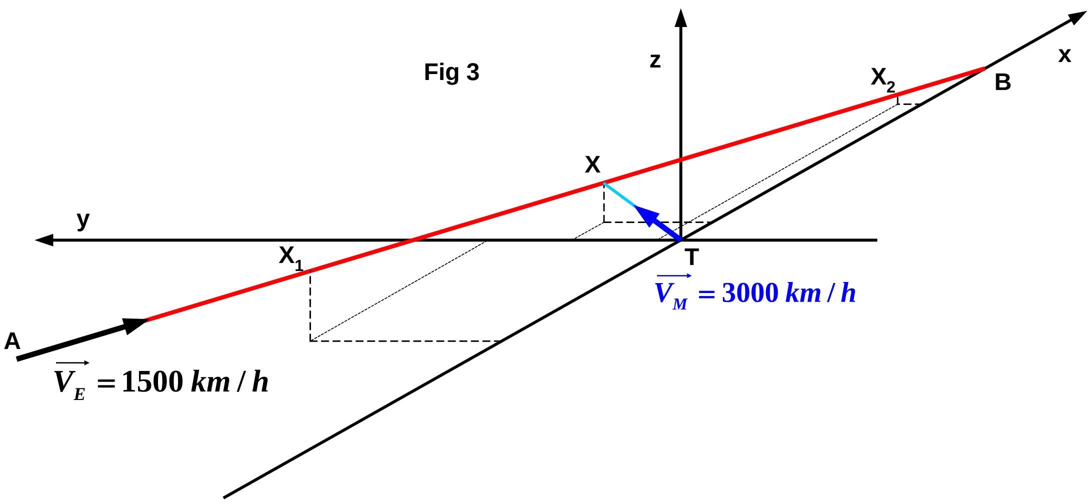
L'impact doit se faire entre X_1 et X_2. (Voir figure 3)

Fig 2



x
B
TB = 100 km
150°
y
z
T
60°
AT = 150 km
A'T = 147.7 km
A
A'

Fig 3



z
x
X2
B
X
y
X1
T
$\overrightarrow{V_M} = 3000\ km/h$
A
$\overrightarrow{V_E} = 1500\ km/h$

Puisque l'on peut choisir le point d'impact, autant choisir X de façon à ce que la distance soit la plus courte possible.

Il suffit d'annuler la dérivée de $\left\|\overrightarrow{TX}\right\| \rightarrow 2\times 85.6124k - 1750.146 = 0$

$\rightarrow k = 10.2213 \rightarrow X:(10.556; 28.984; 10.221) \rightarrow \left\|\overrightarrow{TX}\right\| = 32.4957\ km$

Et notre missile mettra : $t_2 = \dfrac{\left\|\overrightarrow{TX}\right\|}{V_M} = \dfrac{32.4957}{3000} = 0.0108319\ h = 38\ s\ \dfrac{99}{100}$

Le missile ennemi mettra un temps t_4 pour aller de A à X.

$$t_4 = \frac{\left\|\overrightarrow{AX}\right\|}{V_E} = \frac{\sqrt{(10.556+127.93022)^2 + (73.86055-28.984)^2 + (26.047-10.221)^2}}{1500}$$

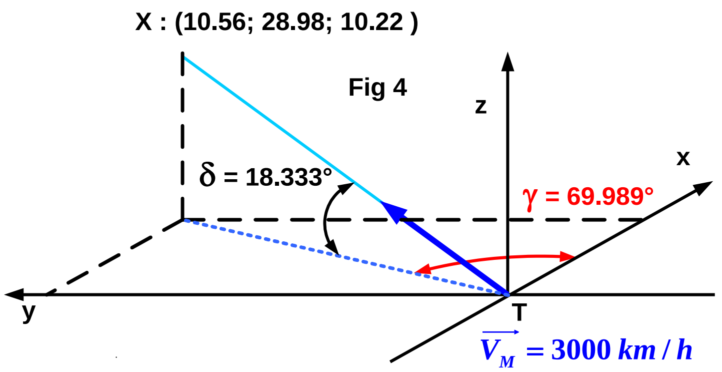
$$= \frac{146.43309}{1500} = 0.097622\ h = 5\min 51s\ \frac{44}{100}$$

Il faut donc tirer notre missile $t_3 = t_4 - t_2 = 0.097622 - 0.0108319 = 0.0867901\ h = 5\min 12s\ \dfrac{44}{100}$ après le passage du missile ennemi au point A.

Les coordonnées de tir sont : (Figure 4)

$$\text{arc tan}\,\gamma = \text{arc tan}\,\frac{28.98423}{10.556} = 69.989°$$

$$\text{arc tan}\,\delta = \text{arc tan}\,\frac{10.221}{\sqrt{10.556^2 + 28.98423^2}} = 18.333°$$



EXTRI103 – Louvain, Septembre 2000.

Résoudre l'équation en x suivante :

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et présenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

C'est une équation de la forme :

$a\cos x + b\sin x = c \quad \rightarrow \quad \cos(x-\varphi) = c\cos\varphi$ avec $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$

Ici $\tan\varphi = -1 \;\rightarrow\; \varphi = -45° \;\rightarrow\; \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\rightarrow \; \cos(x+45) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$\rightarrow x + 45 = 180 \pm 60 + 2k180$

$\rightarrow \boxed{x = 195° + 2k180° \quad \text{et} \quad x = 75° + 2k180°}$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle.

EXTRI104 – Louvain, juillet 2000.

Trouver les valeurs de x qui satisfont à l'équation suivante :

$$x^2 \sin^2 a - 2x\left(1-\cos a \cos b\right) + \sin^2 b = 0$$

- En utilisant les expressions obtenues, calculer ces valeurs pour a = 120° et b = 60°
- Que devient l'équation de départ si $\sin^2 a = 0$? Que seront ses solutions ?

---

1) C'est une équation du second dégré en x, et comme le coefficient de x est pair on calcule le Δ' :

$$\Delta' = 1 - 2\cos a \cos b + \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b$$

$$= 1 - 2\cos a \cos b + \cos^2 a \cos^2 b - \left(1-\cos^2 a\right)\left(1-\cos^2 b\right)$$

$$= \left(\cos a - \cos b\right)^2$$

$$\rightarrow x = \frac{1-\cos a \cos b \pm \left(\cos a - \cos b\right)}{\sin^2 a}$$

$$x_1 = \frac{1-\cos b + \cos a\left(1-\cos b\right)}{1-\cos^2 a} = \frac{\left(1-\cos b\right)\left(1+\cos a\right)}{\left(1-\cos a\right)\left(1+\cos a\right)} = \frac{1-\cos b}{1-\cos a}$$

De même : $x_2 = \dfrac{1+\cos b}{1+\cos a}$

2) Si $a = 120°$ et $b = 60°$, $\quad x_1 = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = 3$

3) $\sin^2 a = 0 \rightarrow \sin a = 0 \rightarrow a = k\pi \rightarrow \cos a = \pm 1$

3.1) $\cos a = 1$

L'équation devient : $-2x\left(1-\cos b\right) + \sin^2 b = 0$

$$\rightarrow x = \frac{\sin^2 b}{2\left(1-\cos b\right)} = \frac{\left(1-\cos b\right)\left(1+\cos b\right)}{2\left(1-\cos b\right)} = \frac{1+\cos b}{2}$$

3.2) $\cos a = -1 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{1-\cos b}{2}$

EXTRI105 – Louvain, septembre 2000.

Résoudre le système suivant en x et y :

$$\begin{cases} \tan x + \tan y = 2 \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan x + \tan y = 2 & (1) \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

De $(1) \rightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin y}{\cos y} = 2 \rightarrow \sin x \cos y + \sin y \cos x = 2 \cos x \cos y$

En tenant compte de $(2) \rightarrow \sin(x+y) = 1 \rightarrow x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x + y = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow (2) \rightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right)\cos y = \sin y \cos y = \dfrac{1}{2}\sin 2y = \dfrac{1}{2}$

$\rightarrow \sin 2y = 1 \rightarrow \boxed{y = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi}$

EXTRI106 – Louvain, septembre 2000.

Dans un triangle *ABC*, on dénomme *A*,*B* et *C* les angles des sommets correspondants, et *a*, *b* et *c* respectivement les côtés apposés aux angles *A*, *B* et *C*.
Si $A = 2\,B$, et que *a* et *b* sont connus, comment déterminer l'angle *C* et le côté *c* ?
Discuter des conditions sur les valeurs que l'on peut donner à *a* et *b* pour que le triangle soit soluble.

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \rightarrow \frac{\sin 2B}{a}=\frac{\sin B}{b} \rightarrow \frac{2\sin B\cos B}{a}=\frac{\sin B}{b} \rightarrow \cos B=\frac{a}{2b}$$

$$A+B+C=\pi \rightarrow C=\pi-3B \qquad (1)$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2+2ab\cos 3B$$

Or $\cos 3B=4\cos^3 B-3\cos B$

$$\rightarrow c^2=a^2+b^2+2ab\left(4\cos^3 B-3\cos B\right)=a^2+b^2+2ab\left[4\left(\frac{a}{2b}\right)^3-3\left(\frac{a}{2b}\right)\right]$$

$$=\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{b^2} \rightarrow \begin{cases} c=\dfrac{(a+b)(a-b)}{b} & \text{si } a>b \\ c=\dfrac{(a+b)(b-a)}{b} & \text{si } b>a \end{cases}$$

Reprenons (1)

$$\cos C=\cos(\pi-3B)=-\cos 3B=3\cos B-4\cos^3 B=3\frac{a}{2b}-4\left(\frac{a}{2b}\right)^3$$

$$=\frac{a}{2b}\left(3-\frac{a^2}{b^2}\right)$$

Si $a=b$, le triangle est insoluble. (D'une part, il est isocèle $\rightarrow$ $A=B$, et d'autre part les formules donnent $c=0$ et $C=0$)

EXTRI107 – Louvain, septembre 2000.

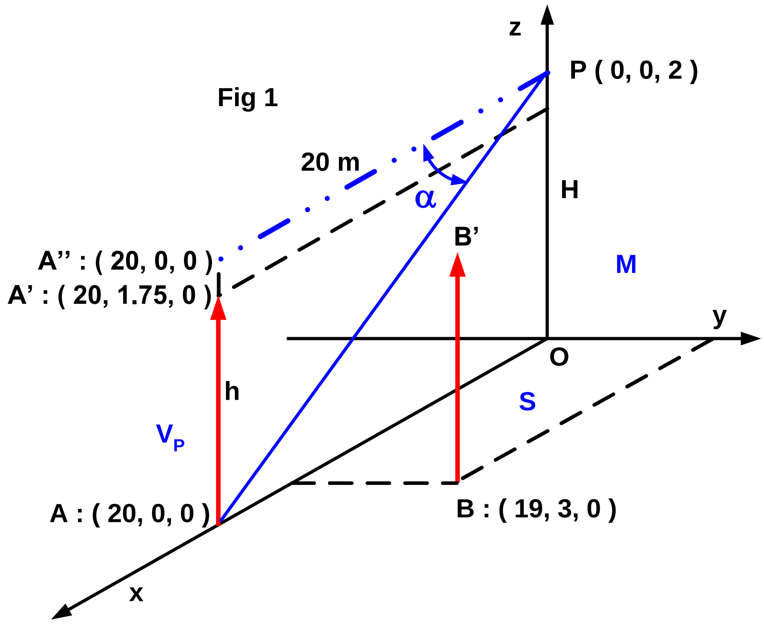
Emilie a placé un détecteur de présence pour surveiller l'entrée de sa maison. Ce type de détecteur signale tout mouvement jusqu'à une distance : $L \cos \alpha$, où $L = 20$ mètres est une caractéristique du détecteur, et où α est l'angle entre l'axe du détecteur et la droite qui relie son point d'attache P et un point I de l'intrus. Le point P est situé à 2 mètres de haut par rapport au sol.

Nous appellerons M le plan vertical du mur de façade, et S le plan horizontal du sol devant la maison. Soit V_P le plan vertical perpendiculaire au mur M et qui passe par le point d'attache P.

Emilie a réglé le détecteur de telle sorte que son axe soit perpendiculaire au mur M.

- Si un intrus d'une taille de $h = 1.75$ m se trouve devant le mur, dans le plan V_P et à une distance de 20 mètres du mur M, sera-t-il détecté (ses pieds sont en un point A du plan S) ? Justifiez.
- Soit un point I du plan V_P et x sa distance par rapport au mur M. Exprimer, en fonction de L, H et h la condition sur x pour que ce point soit détecté.

Emilie aimerait beaucoup comprendre vos calculs, parce qu'elle n'est pas certaine de garder ce type de détecteur : il y en a d'autres au catalogue. Et en outre, ce n'est pas sûr qu'il soit bien placé.
Aussi ce serait gentil de noter le plus clairement possible les étapes de votre raisonnement, et de préciser les données qui interviennent dans vos calculs. Une marche à suivre claire, et quelques bons dessins et schémas l'aideraient à résoudre une nouvelle situation.



Intrus en position A (Figure 1)

Les pieds (en A) : $PA=\sqrt{20^2+2^2}=20.0998\ m,\quad \cos\alpha=\dfrac{20}{20.0998}=0.995$

Vérifions la condition de détection : $PA\leq L\cos\alpha$

$\rightarrow 20.0998\leq 20\times 0.995=19.9$ FAUX, les pieds ne seront pas détectés.

La tête (en A') : $PA'=\sqrt{20^2+0.25^2}=20.001562\ \ m,\quad \cos\alpha=\dfrac{20}{20.001562}=0.9999$

$\rightarrow 20.001562\leq 20\times 0.9999=19.998$ FAUX, la tête n'est pas non plus détectée.

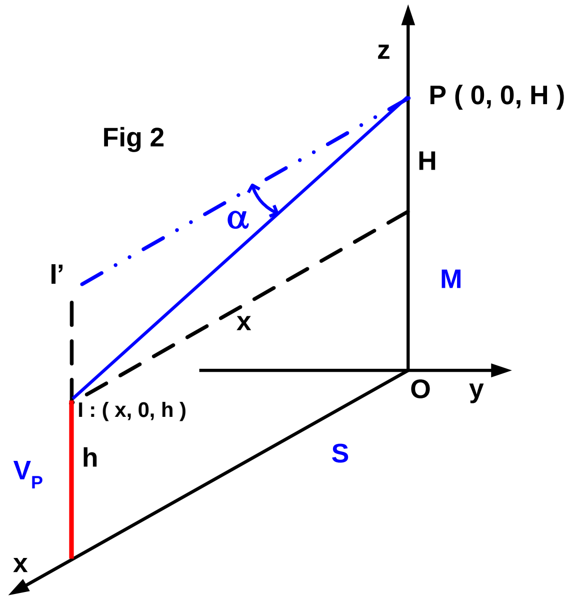
(On est à la limite de la détection : l'intrus ne doit pas beaucoup bouger).

Intrus en position B

On peut supposer que le déplacement perpendiculaire au mur se fait vers le mur, puisque l'intrus n'est pas détecté en A.

$\overrightarrow{PB}:(19,3,\text{-}2)\quad \left\|\overrightarrow{PB}\right\|=19.339\ m\quad \cos\alpha=0.98247$

$\rightarrow\ 19.339\leq 0.98247\times 20=19.6494\ m$ VRAI, l'intrus est détecté.



Intrus en position I $\quad$ (Figure 2)

$I:(x,0,h) \quad I':(x,0,0) \quad \overrightarrow{PI}:(x,0,h-H)$

$\left\|\overrightarrow{PI}\right\| = \sqrt{x^2+(h-H)^2} \quad \cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+(h-H)^2}}$

Il faut vérifier : $\left\|\overrightarrow{PI}\right\| \le L\cos\alpha$

$\to \sqrt{x^2+(h-H)^2} \le \dfrac{xL}{\sqrt{x^2+(h-H)^2}} \to x^2 - Lx + (h-H)^2 \le 0$

Les solutions acceptables sont les valeurs de x situées entre les racines.

$$\boxed{\frac{L-\sqrt{L^2-4(h-H)^2}}{2} \le x \le \frac{L+\sqrt{L^2-4(h-H)^2}}{2}}$$

avec la condition : $L \ge 2(H-h)$

Conclusion : l'intrus ne doit se trouver ni trop loin ni trop près du mur pour être détecté. Il ne faut pas non plus placer le détecteur trop haut.

Note : En général, $L^2 >>> 4(h-H)^2 \quad \to \quad 0 \le x \le L$

EXTRI108 – Louvain, juillet 2001.

Trouver les valeurs de *x* qui satisfont à l'équation suivante.

$$1-\cos^2 2x=\sin 2x\cos x$$

Et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

$$1-\cos^2 2x=\sin 2x\cos x \;\rightarrow\; \sin^2 2x=\sin 2x\cos x$$

$$1)\ \sin 2x=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x=k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$$

$$\text{Il reste : }\sin 2x=\cos x \;\rightarrow\; 2\sin x\cos x=\cos x$$

$$2)\ \cos x=0 \;\rightarrow\; x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\text{Il reste : }\ \sin x=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \end{cases}$$

EXTRI109 – Louvain, juillet 2001.

Résoudre le système suivant en x et y :

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{4\pi}{3} \\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Disposez ces solutions sur le cercle trigonométrique et vérifiez leur validité.

$$x+y=\frac{4\pi}{3} \;\rightarrow\; x=\frac{4\pi}{3}-y \;\rightarrow\; \cos x=\cos\left(\frac{4\pi}{3}-y\right) \;\text{ or }\; \cos x=-\frac{1}{2}\cos y$$

$$\rightarrow\; -\frac{1}{2}\cos y=\cos\frac{4\pi}{3}\cos y+\sin\frac{4\pi}{3}\sin y$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}\cos y=-\frac{1}{2}\cos y-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y$$

$$\rightarrow\; \sin y=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} y=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{4\pi}{3} \\ y=\pi \;\rightarrow\; x=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$