

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 12

EXTRI120-EXTRI129

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Mars 04

EXTRI120 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2002.

Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\cot x - \cos x}{\cot x + \cos x} = 2(1 - \sin x)$$

$$\text{CE : } \begin{cases} \sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0^\circ + k180^\circ \\ \cot x + \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq 90^\circ + k180^\circ \end{cases}$$

$$\frac{\cot x - \cos x}{\cot x + \cos x} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x} + \cos x} = \frac{\cos x \frac{1 - \sin x}{\sin x}}{\cos x \frac{1 + \sin x}{\sin x}} = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

$$\Rightarrow \text{L'équation devient : } \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 2(1 - \sin x)$$

Or $\sin x \neq 1$ en vertu des CE.

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \sin x} = 2 \Rightarrow 2 \sin x = -1 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

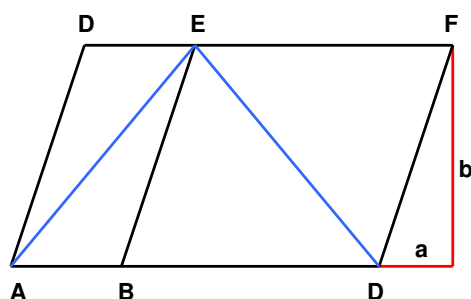
$$\Rightarrow \boxed{x = -30^\circ + k360^\circ \text{ ou } x = 210^\circ + k360^\circ}$$

Résolu le 8 mars 2004
Modifié le 2 juillet 2004

EXTRI121 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2002.

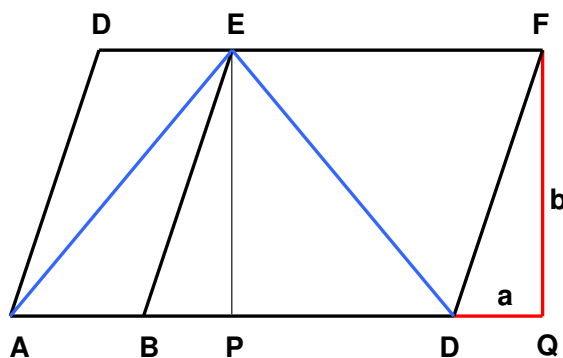
On donne 2 parallélogrammes : $ABED$ et $BCFE$. On sait que :

$$AB = 3 \text{ m}, BC = 7 \text{ m}, a = 2 \text{ m et } b = 6 \text{ m}$$



Calculer :

- Les angles AEB et BEC
- Les longueurs des segments $[A, E]$, $[B, E]$ et $[C, E]$
- Le rapport des longueurs des diagonales $[A, E]$ et $[C, E]$



$$\Delta ABC : |CF| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{40} = 6.3246 \text{ m}$$

Soit P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées de E et F .

$$|PC| = |EF| = 7 \text{ m} \rightarrow |PC| = |PQ| - |CQ| = 5 \text{ m}$$

$$|BP| = |BC| - |PC| = 2 \text{ m}$$

$$\Delta BPE : |BE| = |CF| \rightarrow \cos BEP = \frac{|EP|}{|BE|} = \frac{6}{\sqrt{40}} = 0.9487 \rightarrow BEP = 18.4349^\circ$$

$$\Delta APE : |AP| = |AB| + |BP| = 5 \text{ m} \rightarrow |AE| = \sqrt{|AP|^2 + |EP|^2} = \sqrt{61} = 7.8102$$

$$\rightarrow \cos AEP = \frac{|EP|}{|AE|} = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{40}} = 0.7882 \rightarrow AEP = 39.8056^\circ$$

$$\Delta PCE : |CE| = \sqrt{|PC|^2 + |EP|^2} = 7.8102 \text{ m}$$

$$\rightarrow \cos PEC = \frac{|EC|}{|BE|} = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{40}} = 0.7882 \rightarrow PEC = 39.8056^\circ$$

Le triangle AEC est donc isocèle, bien que cela ne semble pas le cas (illusion d'optique)

Conclusion

$$\overline{AEB} = \overline{AEP} - \overline{BEP} = 21.3706^\circ$$

$$\overline{BEC} = \overline{BEP} + \overline{PEC} = 58.2405^\circ$$

$$|AE| = |CE| = \sqrt{61} = 7.81102 \text{ m} \rightarrow \frac{|AE|}{|CE|} = 1$$

$$|BE| = \sqrt{40} = 6.3246 \text{ m}$$

EXTRI122 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2003.

Vérifier que, pour tout x , on a l'identité suivante :

$$\sin^2 x + \sin^2 \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin^2 \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{3}{2}$$

Utilisons Carnot : $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

Le premier membre devient :

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos \left(2x + \frac{4\pi}{3} \right)}{2} + \frac{1 - \cos \left(2x - \frac{4\pi}{3} \right)}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\cos 2x + \cos \left(2x + \frac{4\pi}{3} \right) + \cos \left(2x - \frac{4\pi}{3} \right) \right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\cos 2x + \cos 2x \cos \frac{4\pi}{3} - \sin 2x \sin \frac{4\pi}{3} + \cos 2x \cos \frac{4\pi}{3} + \sin 2x \sin \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\cos 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

EXTRI123 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2003.

Sans l'aide de la calculatrice, démontrer l'égalité suivante :

Sans l'aide de la calculatrice, démontrer l'égalité suivante :

$$\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \sin 90^\circ = \frac{1}{16}$$

$$\text{On a : } \sin 2a = 2 \sin a \cos a \Rightarrow \sin a = \frac{\sin 2a}{2 \cos a}$$

L'égalité devient, en tenant compte que $\sin 90^\circ = 1$ et $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{2} \frac{\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ} \frac{1}{2} \frac{\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ} \frac{1}{2} \frac{\sin 140^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{1}{8}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \sin 20^\circ = \cos 70^\circ \\ \sin 100^\circ = \sin 80^\circ = \cos 10^\circ \\ \sin 140^\circ = \sin 40^\circ = \cos 40^\circ \end{cases} \quad \text{ce qui démontre l'égalité.}$$

Modifié le 29 juin 2009 (Carmelo DI NOLFO)

EXTRI124 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2003.

Résoudre l'équation suivante :

$$\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

$$\begin{aligned}\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x &\Rightarrow 2 \cos 4x \cos 2x = 2 \cos^2 4x \\ \Rightarrow 2 \cos 4x (\cos 2x - \cos 4x) &= 0\end{aligned}$$

$$1) \cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}}$$

$$2) \cos 2x = \cos 4x \Rightarrow 4x = \pm 2x + 2k\pi$$

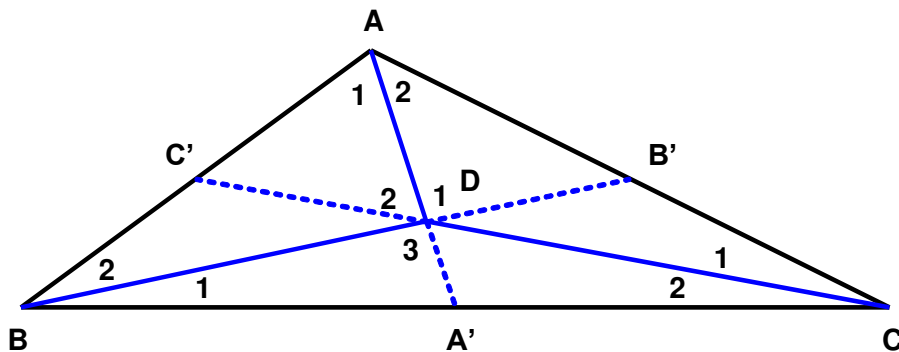
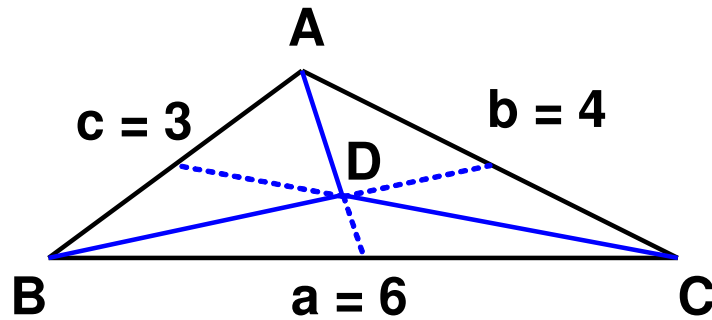
$$a) 4x = 2x + 2k\pi \quad \Rightarrow \boxed{x = k\pi}$$

$$b) 4x = -2x + 2k\pi \rightarrow 6x = 2k\pi \quad \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{3}}$$

EXTRI125 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2003.

Soit un triangle dont les côtés mesurent respectivement $a = 6$ cm, $b = 4$ cm et $c = 3$ cm (voir figure)

- On demande d'abord de calculer les valeurs des trois angles intérieurs du triangle A , B , et C .
- On divise le triangle en trois sous-triangles dont le sommet est D , point d'intersection des médianes. On demande de calculer les aires, les angles et les cotés des trois sous-triangles ABD , BCD et ADC (en utilisant uniquement la trigonométrie)



$$a) A = \arccos \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \arccos \frac{6^2 - 4^2 - 3^2}{-2 \times 4 \times 3} = 117.2896^\circ$$

$$B = \arccos \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \arccos \frac{4^2 - 6^2 - 3^2}{-2 \times 6 \times 3} = 36.3361^\circ$$

$$C = \arccos \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} = \arccos \frac{3^2 - 6^2 - 4^2}{-2 \times 6 \times 4} = 26.3843^\circ$$

b) D est le barycentre et ce trouve aux deux tiers de chaque médiane.

$$|AA'|^2 = |A'B|^2 + c^2 - 2|A'B| \cdot c \cdot \cos \widehat{B} = 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \times \cos(36.3361) = 3.5$$

$$\rightarrow |AA'| = 1.8708 \text{ cm}$$

$$|BB'|^2 = a^2 + |B'C|^2 - 2a|B'C| \cdot \cos \widehat{C} = 6^2 + 2^2 - 2 \times 6 \times 2 \times \cos(26.3843) = 18.5$$

$$\rightarrow |BB'| = 4.3012 \text{ cm}$$

$$|CC'|^2 = |C'A|^2 + b^2 - 2|C'A| \cdot b \cdot \cos \widehat{A} = 1.5^2 + 4^2 - 2 \times 1.5 \times 4 \times \cos(117.2796) = 23.75$$

$$\rightarrow |CC'| = 4.8734 \text{ cm}$$

$$|A'B|^2 = |AA'|^2 + c^2 - 2|AA'| \cdot c \cdot \cos \widehat{A_1}$$

$$\rightarrow \widehat{A_1} = \arccos \frac{|A'B|^2 - |AA'|^2 - c^2}{-2|AA'| \cdot c} = \arccos \frac{3^2 - 1.8708^2 - 3^2}{-2 \times 1.8708 \times 3} = 71.8320^\circ$$

$$|B'C|^2 = |BB'|^2 + a^2 - 2|BB'| \cdot a \cdot \cos \widehat{B_1}$$

$$\rightarrow \widehat{B_1} = \arccos \frac{|B'C|^2 - |BB'|^2 - a^2}{-2|BB'| \cdot a} = \arccos \frac{2^2 - 4.3012^2 - 6^2}{-2 \times 4.3012 \times 6} = 11.9254^\circ$$

$$|AC'|^2 = |CC'|^2 + b^2 - 2|CC'| \cdot b \cdot \cos \widehat{C_1}$$

$$\rightarrow \widehat{C_1} = \arccos \frac{|AC'|^2 - |CC'|^2 - b^2}{-2|CC'| \cdot b} = \arccos \frac{1.5^2 - 4.8734^2 - 4^2}{-2 \times 4.8734 \times 4} = 15.8763^\circ$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \widehat{A_2} = 117.2796 - 71.8320 = 45.4476 \\ \widehat{B_2} = 36.3361 - 11.9254 = 24.4107 \\ \widehat{C_2} = 26.3843 - 15.8763 = 10.5081 \end{cases}$$

$$\text{Et donc } \widehat{D_1} = 83.7573, \widehat{D_2} = 118.6761, \widehat{D_3} = 157.5666$$

$$|BD| = \frac{c \sin \widehat{A_1}}{\sin \widehat{D_1}} = \frac{3 \sin 71.8320}{\sin 83.7573} = 2.8674 \text{ cm}$$

$$|AD| = \frac{b \sin \widehat{C_1}}{\sin \widehat{D_2}} = \frac{4 \sin 15.8763}{\sin 118.6761} = 1.2472 \text{ cm}$$

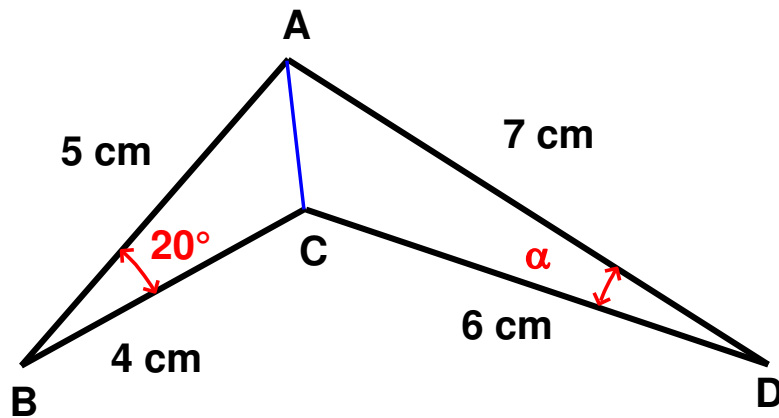
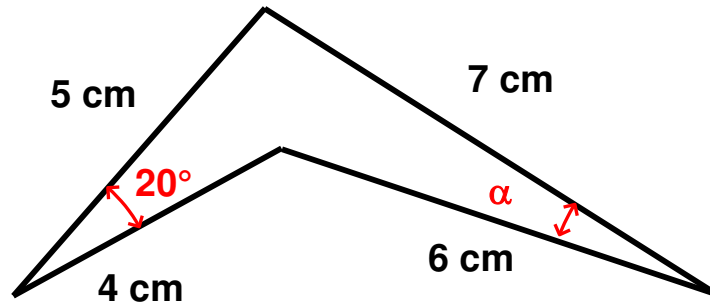
$$|CD| = \frac{a \sin \widehat{B_1}}{\sin \widehat{D_3}} = \frac{6 \sin 11.9254}{\sin 157.5666} = 3.2489 \text{ cm}$$

$$S_{\Delta ABD} = \frac{c |AD| \sin \widehat{A_1}}{2} = \frac{3 \times 1.2472 \sin 71.8320}{2} = 1.7776 \text{ cm}^2$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{a |BD| \sin \widehat{B_1}}{2} = \frac{6 \times 2.8674 \sin 11.9254}{2} = 1.7776 \text{ cm}^2$$

EXTRI126 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2003.

Pour la figure donnée, calculer l'angle α et l'aire du polygone



Méthode 1

$$a) \triangle ABC : |AC|^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos B$$

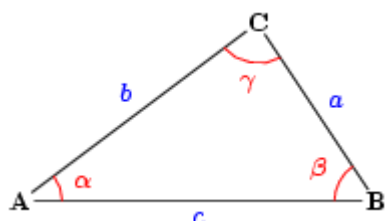
$$\triangle ADC : |AC|^2 = 7^2 + 6^2 - 2 \times 7 \times 6 \times \cos \alpha$$

$$\rightarrow \alpha = \arccos \frac{5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos 20^\circ - 7^2 - 6^2}{-2 \times 7 \times 6} = 13.7644^\circ$$

$$b) S_{\text{polygone}} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} 4 \times 5 \times \sin 20^\circ + \frac{1}{2} 7 \times 6 \times \sin 13.7644^\circ \\ = 8.41674 \text{ cm}^2$$

Méthode 2 (Frédéric Baldan)

Rappel : Théorème d'Al-Kashi

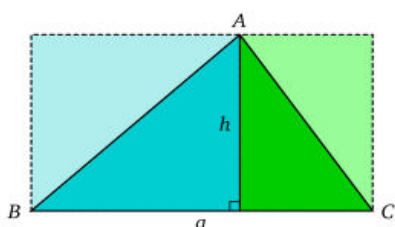


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Par conséquent :

<p>Nous pouvons calculer le coté « a » grâce au triangle de gauche :</p> $a^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos(20)$ $a^2 = 41 - 40 \cdot \cos(20)$ $a = 1.847239878$ <p>Remarque : le calcul de a n'est pas nécessaire pour trouver α.</p>	<p>Dans le triangle de droite</p> $41 - 40 \cdot \cos(20) = 7^2 + 6^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos(\alpha)$ $-44 - 40 \cdot \cos(20) = -84 \cdot \cos(\alpha)$ $\alpha = \arccos\left(\frac{-44 - 40 \cdot \cos(20)}{-84}\right)$ <p>$\alpha = 13.76442451^\circ$</p>
---	--

Rappel : Surface d'un triangle quelconque



On peut aussi utiliser la formule de Héron d'Alexandrie :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ est le *demi-périmètre* du triangle.

Par conséquent :

<p>Dans le triangle de gauche :</p> $p = \frac{1}{2}(5 + 4 + 1.847239878)$ $p = 5.423619939$ $S = \sqrt{p \cdot (p-5) \cdot (p-4) \cdot (p-1.847239878)}$ $S = 3.420201433$	<p>Dans le triangle de droite :</p> $p = \frac{1}{2}(6 + 7 + 1.847239878)$ $p = 7.423619939$ $S = \sqrt{p \cdot (p-6) \cdot (p-7) \cdot (p-1.847239878)}$ $S = 4.996538927$
---	---

$$S = 8.41674036$$

EXTRI127 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2003

EPB, ULB, Bruxelles juillet 2004.

On suppose que l'on connaît la valeur de $\cos 2a$. Posons $\cos 2a = m$.

On demande alors de calculer la valeur de l'expression :

$$E = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$$

En fonction de la valeur de m .

Liège : Vérifier le résultat obtenu pour $m = 1/3$

Bruxelles : Vérifier le résultat pour $m = 1/2$.

a) $E = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha)$$

Le premier facteur vaut 1. Continuons en utilisant Carnot : $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$

$$E = \sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right)^2$$

$$= (1 - \cos^2 \alpha)(-\cos 2\alpha) + \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right)^2$$

$$= -\left(1 - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) \cos 2\alpha + \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right)^2$$

$$= -\left(1 - \frac{1 + m}{2} \right) m + \left(\frac{1 + m}{2} \right)^2 = \frac{3m^2 + 1}{4}$$

b) Liège Soit $m = \cos 2\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow 2\alpha = \pm 70.5288^\circ \rightarrow \alpha = 35.2644^\circ$

$$E = \sin^6 35.2644^\circ + \cos^6 35.2644^\circ = 0.33333 \quad \text{et} \quad E = \frac{3m^2 + 1}{4} = \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1}{4} = \frac{1}{3} = 0.33333$$

Bruxelles Soit $m = \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow 2\alpha = \pm 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

$$E = \sin^6 30^\circ + \cos^6 30^\circ = 0.4375 \quad \text{et} \quad E = \frac{3m^2 + 1}{4} = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}{4} = 0.4375$$

EXTRI128 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2003.

Trouver toutes les solutions x qui satisfont à l'équation suivante.

$$\cos 9x - 2 \cos 6x = 2$$

Représentez les solutions sur le cercle trigonométrique

$$\cos 9x - 2 \cos 6x = 2 \Rightarrow \cos(6x + 3x) - 2 \cos^2 3x + 2 \sin^2 3x = 2(\sin^2 3x + \cos^2 3x)$$

$$\Rightarrow \cos 6x \cos 3x - \sin 6x \sin 3x - 4 \cos^2 3x = 0$$

$$\Rightarrow (2 \cos^2 3x - 1) \cos 3x - 2 \sin^2 3x \cos 3x - 4 \cos^2 3x = 0$$

$$1) \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \pm 90^\circ + k180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ + k60^\circ$$

$$2) 2 \cos^2 3x - 1 - 2(1 - \cos^2 3x) - 4 \cos 3x = 0$$

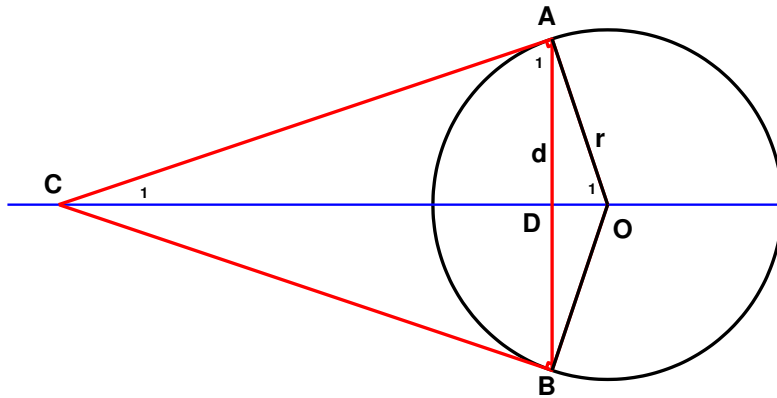
$$4 \cos^2 3x - 4 \cos 3x - 3 = 0 \Rightarrow \cos 3x = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{A rejeter} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x = \pm 120^\circ + k360^\circ \Rightarrow x = \pm 40^\circ + k120^\circ$$

EXTRI129 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2003.

Soit A et B deux points distincts (non diamétralement opposés) d'un cercle de rayon r et C le point d'intersection des tangentes à ce cercle aux points A et B .

Soit $\|AB\| = 2d$. Calculer les angles et l'aire du triangle ABC en fonction de d et r .



$$A_1 = O_1 = \arcsin \frac{d}{r} \Rightarrow C = 2C_1 = \pi - 2 \arcsin \frac{d}{r}$$

$$|OD| = r \cos O_1$$

Les triangles CAD et AOD sont semblables

$$|CD| = \frac{d^2}{|OD|} = \frac{d^2}{r \cos O_1} = \frac{d^2}{r \cos \arcsin \frac{d}{r}} = \frac{d^2}{r \frac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r}} = \frac{d^2}{\sqrt{r^2 - d^2}}$$

Et donc l'aire du triangle est

$$A_{CAB} = \frac{d^3}{\sqrt{r^2 - d^2}} = \frac{d^2}{\sqrt{\frac{r^2}{d^2} - 1}}$$