Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie Calcul numérique

TRI 13

EXTRI130-EXTRI139

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Mars 04

EXTRI130 – FACS, ULG, Bruxelles, juillet 2003.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos 2x + \sqrt{3}\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$\cos 2x + \sqrt{3}\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}$$

$$\tan\varphi = -\sqrt{3} \ \rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} \ \rightarrow \cos\varphi = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x - \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

EXTRI131 – FACS, ULG, Bruxelles, septembre 2003.

Calculer $\tan\frac{\pi}{8}$, en déduire $\cot\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

$$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}} \rightarrow \tan^2\frac{\pi}{8}+2\tan\frac{\pi}{8}-1=0$$

$$\rightarrow \tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$$

$$\rightarrow \cot\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

$$\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{\tan^2\frac{\pi}{8}+1}}=\sqrt{\frac{1}{2-2\sqrt{2}+1+1}}=\sqrt{\frac{1}{4+2\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cot^2 x+1=\frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow \sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{\cot^2\frac{\pi}{2}+1}}=\sqrt{\frac{1}{2+2\sqrt{2}+1+1}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

EXTRI132 – FACS, ULG, Bruxelles, septembre 2003.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l' équation

$$\sin x + \cos x + 2\sqrt{2}\sin x \cos x = 0$$

$$\sin x + \cos x + 2\sqrt{2}\sin x \cos x = 0$$

$$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sqrt{2}\sin 2x = 0$$

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin 2x = 0$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin(-2x)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi \\ x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \end{cases}$$

Finalement, $\boxed{x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}}$

EXTRI133 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2002.

Résoudre le système suivant en x et y

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4} \\ \sqrt{2}\sin x\sin y+1=0 \end{cases}$$

Donnez les solutions entre 0 et 2π, et vérifier leur validité.

$$y=\frac{\pi}{4}-x \quad \to \sqrt{2}\sin x\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$$

$$\to \sqrt{2}\sin x\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x\right)+1=0$$

$$\to \sqrt{2}\sin x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)+1=0$$

$$\to \sin x\cos x-\sin^2 x+1=0 \ \to \ \sin x\cos x+\cos^2 x=0$$

$$1)\ \cos x=0 \quad \to \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2} & \to \ y=-\dfrac{\pi}{4} \\ x=-\dfrac{\pi}{2} & \to \ y=\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$2)\ \sin x+\cos x=0 \ \to \ \tan x=-1$$

$$\to \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{4} & \to \ y=\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{3\pi}{4} & \to \ y=-\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vérification

$$\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1=0$$

$$\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{3\pi}{4}+1=0$$

Résolu le 24 juin 2004

EXTRI134 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2002.
FACSA, ULG, Liège, juillet 2006

Dans le triangle ABC, la hauteur AD est coupée en son milieu H par la hauteur CE.
On demande

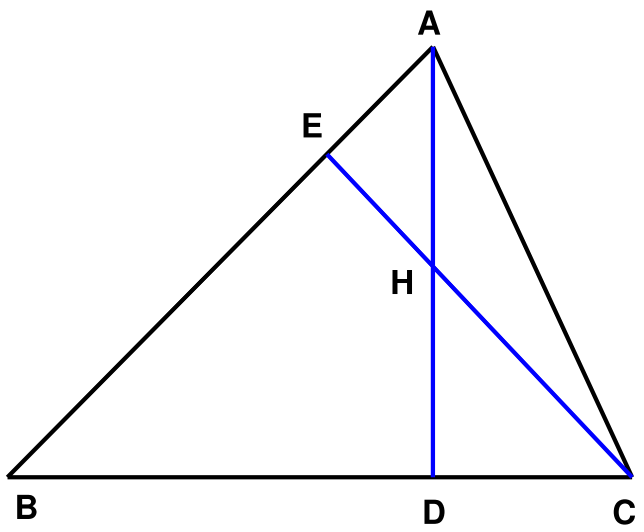
a) De démontrer que :

$$\tan B \tan C = 2$$

b) On donne l'angle A, on a :

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

Trouver les conditions sur $\tan A$ pour qu'une solution existe.



Note : Pour la démonstration de la formule

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

Voir : EXTRI079 – Bruxelles, septembre 2000.

$a)$ $\triangle BEC$ est rectangle $\rightarrow ECB = \dfrac{\pi}{2} - B$

$\rightarrow \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - B\right) = \dfrac{HD}{DC}$ puisque $AD \perp BC$ $\rightarrow \tan B = \dfrac{DC}{HD}$

$\triangle ADC$ est rectangle $\rightarrow DAC = \dfrac{\pi}{2} - C$

$\rightarrow \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - C\right) = \dfrac{DC}{AD}$ puisque $AD \perp BC$ $\rightarrow \tan C = \dfrac{AD}{DC}$

Donc : $\tan B . \tan C = \dfrac{DC}{HD} . \dfrac{AD}{DC} = 2$ puisque H est le milieu de AD

$b)\begin{cases} \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \\ \tan B \tan C = 2 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \tan B + \tan C = \tan A \\ \tan B \tan C = 2 \end{cases}$

$\tan B$ et $\tan C$ sont donc solutions de l'équation :

$X^2 - \tan A . X + 2 = 0$ dont le discrimant est $\Delta = \tan^2 A - 8$

Il faut : $\tan^2 A - 8 \geq 0 \rightarrow \begin{cases} \tan A \leq -2\sqrt{2} \\ \tan A \geq 2\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A \leq 109.47° \\ A \geq 70.53° \end{cases}$

Conclusion : $70.53° \leq A \leq 109.47°$

Résolu le 17/05/04

EXTRI135 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2002.

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est toujours vraie, ou faux si l'affirmation est toujours fausse, ou complétez par une condition qui rende l'affirmation vraie :

1) Un triangle est défini de façon unique par deux de ces côtés et un angle.

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

2) Un triangle a deux côtés égaux si et seulement s'il a deux côtés égaux

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

3) Pour $-\frac{\pi}{4} < A < \frac{\pi}{4}$, $1-\cos 2A < \sin A$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

4) Dans un triangle avec comme angles $A,\ B,\ C$: $\tan(B+C) > \tan(-A)$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

5) $\tan A > \sec A$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

---

1) Vrai si l'angle est compris entre les deux côtés.

2) Toujours vrai. (Triangle isocèle)

3) $1-2\cos A<\sin A \Rightarrow 2\sin^2 A<\sin A \Rightarrow \sin A\left(2\sin A-1\right)<0$

Tableau de signes

	$-\frac{\pi}{4}$				$-\frac{\pi}{6}$				0				$\frac{\pi}{6}$				$\frac{\pi}{4}$
$\sin A$	$-$		$-$		$-$		$-$		0		$+$		$+$		$+$		$+$
$2\sin A-1$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		0		$+$		$+$
$\sin A\left(2\sin A-1\right)$	$+$		$+$		$+$		$+$		0		$-$		0		$+$		$+$

Conclusion : Vrai seulement si $0<A<\frac{\pi}{6}$

4) $\tan\left(B+C\right)>\tan\left(-A\right) \Rightarrow \tan\left(\pi-A\right)>\tan\left(-A\right) \Rightarrow -\tan A>-\tan A$

Donc : toujours faux car $-\tan A=-\tan A$

5) $\tan A>\sec A$

Notons que : $\sin A\sec A=\tan A$ $\left(\text{rappel : } \sec A=\frac{1}{\cos A}\right)$

$1er$ quadrant	$0\leq\sin A\leq 1$ $\sec A>0$	$\sin A\sec A\leq 1$
$2ème$ quadrant	$0\leq\sin A\leq 1$ $\sec A<0$	$\sin A\sec A\geq 1$
$3ème$ quadrant	$-1\leq\sin A\leq 0$ $\sec A<0$	$\sin A\sec A\geq 1$
$4ème$ quadrant	$-1\leq\sin A\leq 0$ $\sec A>0$	$\sin A\sec A\leq 1$

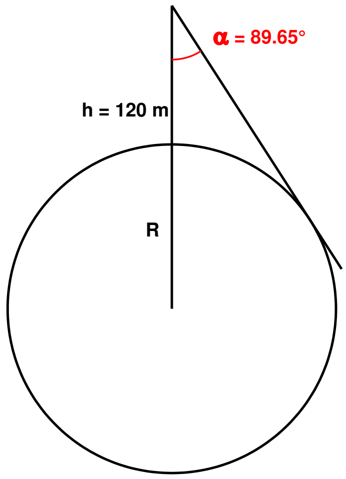
Conclusion : vrai si $\frac{\pi}{2}<A<\frac{3\pi}{2}$

Résolu le 17/05/04

EXTRI136 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2002.

Un ballon atmosphérique survole la Terre. Un observateur, dans ce ballon, voit d'une hauteur *h* (hauteur par rapport à la Terre) l'horizon de la Terre sous un angle α avec la verticale.

1. Calculer le diamètre de la Terre en fonction des données ($\alpha = 89.65°$, h = 120 m)
2. Que pouvez-vous dire du calcul du diamètre si votre mesure de
   a. L'altitude *h* n'est précise qu'à un mètre.
   b. L'angle α n'est précise qu'à un degré.



1) $\sin\alpha = \dfrac{R}{R+h}$

$$\rightarrow \quad D = 2R = \frac{2h\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{2\times 120\times \sin 89.65}{1-89.65} = 12863{,}041\, km$$

2) Etudions l'influence de h

$h\,(m)$	$D\,(km)$	$D - D_{120}$
119	12755.849	−107.192
120	12863.041	0
121	12970.023	106.982

Etudions l'influence de α

$\alpha\,(°)$	$D\,(km)$	$D - D_{89.65}$
88.65	8644.407	−11998.633
89.65	12863.041	0
90.65	Non applicable	

Conclusion : La précision sur α à une influence considérable

Résolu le 17/05/04

EXTRI137 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2002.

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est toujours vraie, ou faux si l'affirmation est toujours fausse, ou complétez par une condition qui rende l'affirmation vraie :

1) Un triangle est défini par deux de ses angles et son aire.

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

2) $\dfrac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B} = \dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

3) Pour $-\dfrac{3\pi}{4} < A < \dfrac{\pi}{4}$, $2\cos^2 A < \sin 2A$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

4) Dans un triangle rectangle ABC on a $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$

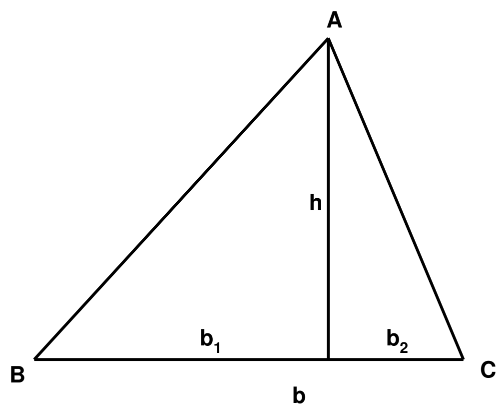
Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

5) $\tan A > \sec A$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :



1) On a (voir figure) : $S = \dfrac{bh}{2}$ $\quad \tan B = \dfrac{b_1}{h}$ $\quad \tan C = \dfrac{b_2}{h}$ $\quad b = b_1 + b_2$

On en déduit : $h = \sqrt{\dfrac{2S}{\tan B + \tan C}}$ et $b = \sqrt{2S\left(\tan B + \tan C\right)}$

Conclusion : toujours vrai

2) $$\frac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B} = \frac{\dfrac{\sin A}{\cos A} + \dfrac{\sin B}{\cos B}}{\dfrac{\sin A}{\cos A} - \dfrac{\sin B}{\cos B}} = \frac{\dfrac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B}}$$
$$= \frac{\sin\left(A+B\right)}{\sin\left(A-B\right)}$$

Conclusion : vrai si $A \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$ et $B \neq \pm\dfrac{\pi}{2}$

3) $2\cos^2 A > \sin 2A \;\Rightarrow\; 2\cos^2 A - 2\sin A\cos A > 0$

$2\cos A\left(\cos A - \sin A\right) > 0$

Tableau de signes

	$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos A$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
$\cos A - \sin A$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\cos A\left(\cos A - \sin A\right)$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$

Conclusion : Vrai seulement si $-\dfrac{\pi}{2} < A < \dfrac{\pi}{2}$

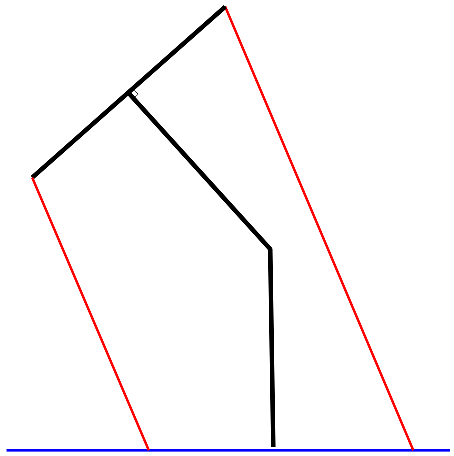
4) Si $A = \dfrac{\pi}{2}$ alors $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C \;\Rightarrow\; 1 = \sin^2 B + \cos^2 B$ car $B = \dfrac{\pi}{2} - C$

Conclusion : Vrai si A est l'angle droit.

Résolu le 17/05/04

EXTRI138 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2002.

J'installe dans mon jardin un parasol sur pied avec un toit plat en forme d'hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon $r = 1$ m. L'axe du parasol est articulé et peut être incliné d'un angle ψ avec la verticale allant jusqu'à 30° (le côté de l'hexagone le plus proche du sol parallèle au sol).



Les rayons de soleil sont parallèles au plan défini par les deux axes articulés du parasol et forment un angle φ avec le plan horizontal.

1. Exprimer la surface d'ombre au sol en fonction des angles φ et ψ.
2. Calculer l'angle ψ qui donne la surface d'ombre maximale pour $\varphi = 75°$ et pour $\varphi = 45°$.

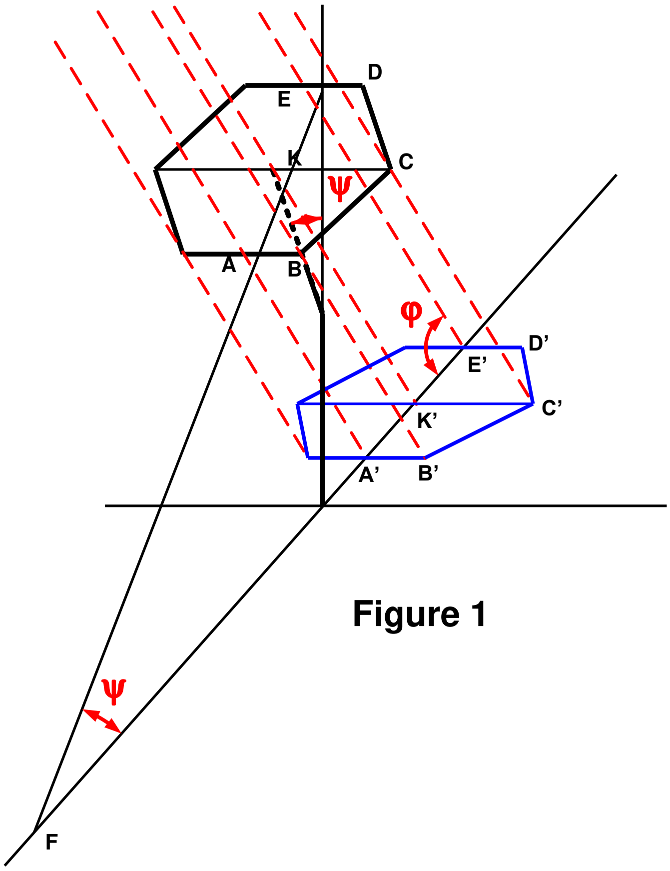


Figure 1

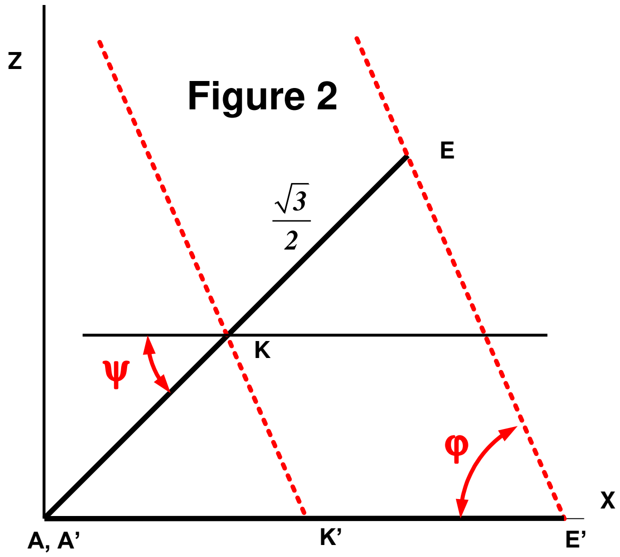
La figure 1 montre que les rayons du Soleil sont parallèles au plan KHO.

On a : $AB // A'B'$ et $AB = A'B' = \frac{r}{2}$.

De même : $ED // E'D'$ et $ED = E'D' = \frac{r}{2}$

La forme et les dimensions de l'ombre ne dépendent pas de la hauteur par rapport au niveau du sol à laquelle se trouve le parasol.

On peut donc ramener le problème au cas où AB et $A'B'$ sont confondus. (Voir figure 2).



L'apothème de l'hexagone vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Les coordonnées des points K et E sont :

$$K:\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\psi, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\psi\right) \quad E:\left(\sqrt{3}\cos\psi, \sqrt{3}\sin\psi\right)$$

L'équation de la droite KK' : $z = -\tan\varphi . x + p$

Elle passe par $K \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\psi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\psi\tan\varphi + p$

$$\rightarrow p = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin\psi + \tan\varphi\cos\psi\right)$$

On en déduit les coordonnées de K' : $x = \dfrac{p}{\tan\varphi} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sin\psi}{\tan\varphi} + \cos\psi\right)$

$$\rightarrow K':\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sin\psi}{\tan\varphi} + \cos\psi\right), 0\right) \quad E':\left(\sqrt{3}\left(\frac{\sin\psi}{\tan\varphi} + \cos\psi\right), 0\right)$$

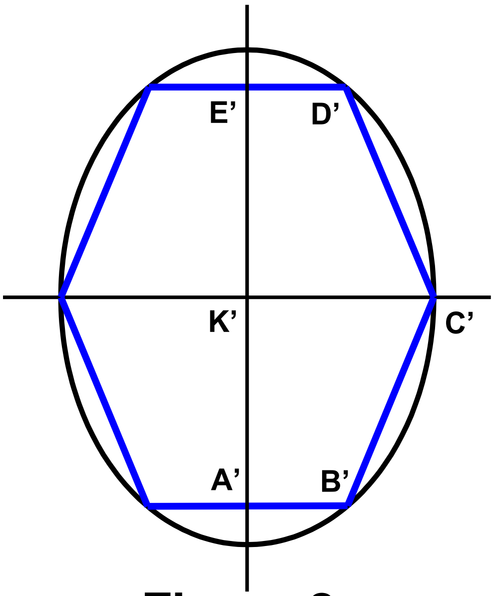


Figure 3

On peut donc maintenant calculer la surface de l'ombre.
Elle est égale à 4 fois la surface du trapèze $A'B'C'K'$.

Comme $A'B' = \dfrac{r}{2}$ et $K'C' = r$

$$\rightarrow S = 4\left(\frac{\frac{r}{2}+r}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sin\psi}{\tan\varphi}+\cos\psi\right)\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sin\psi}{\tan\varphi}+\cos\psi\right)$$

Pour calculer la surface d'ombre maximale pour un φ donné, on calcule

$$\frac{dS}{d\varphi} = \frac{3\sqrt{3}R}{2}\left(\frac{\cos\psi}{\tan\varphi}-\sin\psi\right)$$

Cette dérivée sera nulle si $\dfrac{\cos\psi}{\tan\varphi}-\sin\psi = 0 \rightarrow \tan\psi\ \tan\varphi = 1$

Par conséquent, les angles ψ et φ doivent être complémentaires.

Conclusion : $\varphi = 45° \quad \rightarrow \quad \psi = 45°$

$\varphi = 75° \quad \rightarrow \quad \psi = 15°$

Résolu le 17/05/04

EXTRI139 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2003 et septembre 2007
FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2011

Si $a + b + c = \pi$, vérifier que

$$\cos a - \cos b + \cos c + 1 = 4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$\cos a - \cos b + \cos c + 1 = \cos a - \cos b + \cos(\pi - a - b) + 1$$
$$= \cos a - \cos b - \cos a\cos b + \sin a\sin b + 1$$
$$= \cos a\,(1-\cos b) + (1-\cos b) + \sin a\sin b$$
$$= (1-\cos b)(\cos a + 1) + \sin a\sin b$$
$$= 4\sin^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{a}{2} + 4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}$$
$$= 4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\left(\sin\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2} + \sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\right)$$
$$= 4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b+a}{2} = 4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{c}{2}\right)$$
$$= 4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

Méthode proposée par Steve Tumson

Dans tout triangle : $a+b+c=\pi \Leftrightarrow c=\pi-(a+b)$

$$4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{\pi-(a+b)}{2}=4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a+b}{2}\right)=4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Par les formules de Carnot (formule du produit) :

$$\sin\left(\frac{b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{a}{2}\right)-\cos\left(\frac{a+2b}{2}\right)\right)$$

On obtient donc :

$$4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)=2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{a}{2}\right)-\cos\left(\frac{a+2b}{2}\right)\right)=2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)-2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a+2b}{2}\right)$$

D'une part :

$$2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)=1+\cos a \qquad \text{(formule de linéarisation)}$$

D'autre part :

$$-2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a+2b}{2}\right)=-\cos b-\cos(a+b)=-\cos b-\cos(\pi-c)=-\cos b+\cos c$$

Finalement, on a bien que : $\boxed{\cos a-\cos b+\cos c+1=4\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$

Résolu le 17/05/04. Modifié le 29 juin 2009 (Damien Mercier)