Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 15

EXTRI150-EXTRI159

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Avril 05

EXTRI150– EPL, UCL, LLN, juillet 2004.

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est toujours vraie, ou faux si l'affirmation est toujours fausse, ou complétez par une condition qui rende l'affirmation vraie :

1) Les bissectrices d'un triangle coupent chacune le triangle en deux triangles de surfaces égales.

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

2) La somme des sinus des angles d'un triangle est toujours positive

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

3) Pour $\frac{\pi}{4} < A < \pi, \quad \tan^2 A > \tan A$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

4) Dans un triangle rectangle en A, soit AH la hauteur.

On a alors (en distances : $BH.HC = AH^2$)

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

---

a) Vrai si le triangle est équilatéral.

b) Pour $0 < \alpha < \pi$, $\sin \alpha > 0 \Rightarrow$ toujours vrai.

c) $\tan^2 A > \tan A \Rightarrow \tan A(\tan A - 1) > 0$

Soit le tableau de signe :

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\tan A$	0	$+$	$+1$	$+$	$\therefore$	$-$	-1	$-$	0
$\tan A - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$\therefore$	$-$	-2	$-$	-1
	0	$-$	0	$+$	$\therefore$	$+$	$+2$	$+$	0

$\Rightarrow$ La relation est vraie, sauf pour $A = \frac{\pi}{2}$

d) La hauteur d'un triangle rectangle est moyenne proportionnelle avec les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse $\Rightarrow$ toujours vrai

---

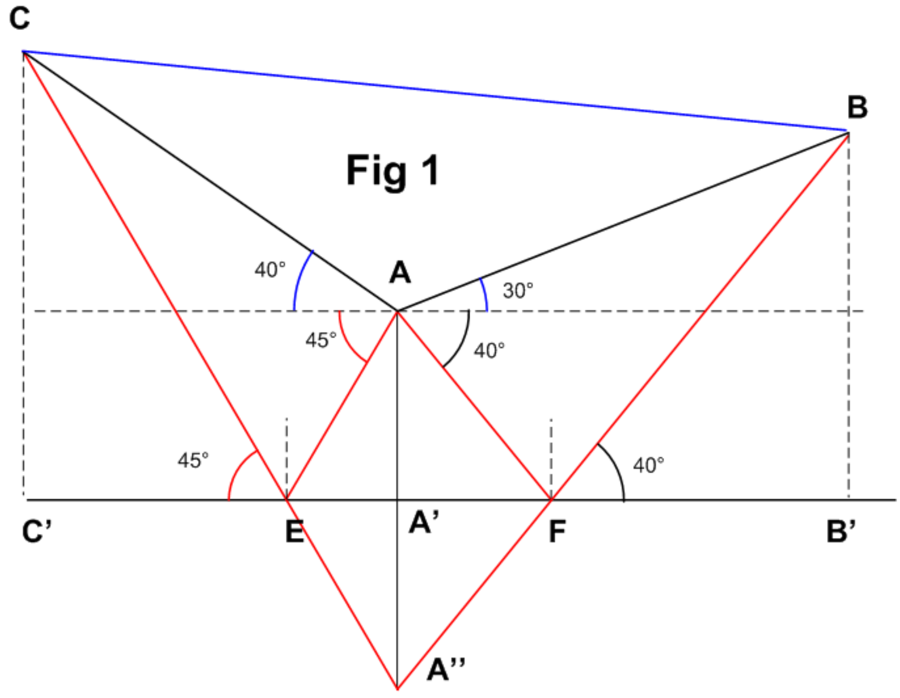
Le 26 mars 05

EXTRI151– Louvain, juillet 2004.

Je me trouve sur un bateau sur un lac par temps calme. L'eau reflète les images comme un miroir. Mon point d'observation se trouve à d = 10 m au dessus de la surface de l'eau.

- J'observe à l'est un oiseau sous un angle de 30° avec l'horizontale et son image réfléchie dans le lac sous un angle de – 40° avec l'horizontale. A quelle hauteur h_1 cet oiseau vole-t-il ?
- J'observe à l'ouest un deuxième oiseau sous un angle de 40° avec l'horizontale et son image réfléchie dans le lac sous un angle de – 45° avec l'horizontale. A quelle hauteur h_2 ce deuxième oiseau vole-t-il ?
- Faites un croquis de la situation et calculez la distance entre les deux oiseaux.

NB : Une onde réfléchie dans un miroir a un angle réfléchi égal à l'angle d'incidence.



Note : Schéma de principe. Les angles ne sont pas respectés

Imaginons un système orthonormé dont le centre est A', projection de A sur la surface du lac. De même, B' est la projection de B, et C' celle de C.
Soit aussi A'' le symétrique de A par rapport à la surface du lac.
Orientons l'axe des x (= $A'B'$) vers l'est. Cherchons les coordonnées de B et C.

$$\begin{cases} AB \equiv y-10=\tan 30.x \\ A''B \equiv y+10=\tan 40.x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tan 30.x-y=-10 \\ \tan 40.x-y=10 \end{cases} \rightarrow B:(76.4;54.1)$$

et l'oiseau V_1 vole donc àune altitude de 54.1 m de même

$$\begin{cases} AC \equiv y-10=-\tan 40.x \\ A''C \equiv y+10=-\tan 45.x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tan 40.x+y=10 \\ x+y=-10 \end{cases} \rightarrow C:(234.3;114.3)$$

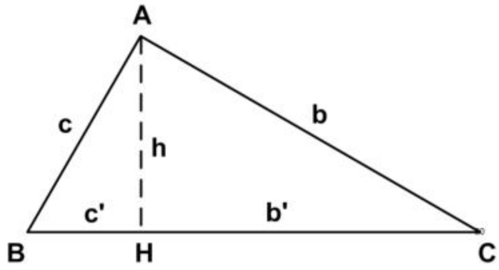
L'oiseau V_2 vole donc à l'altitude 114.3 m
La distance entre les deux oiseaux est :

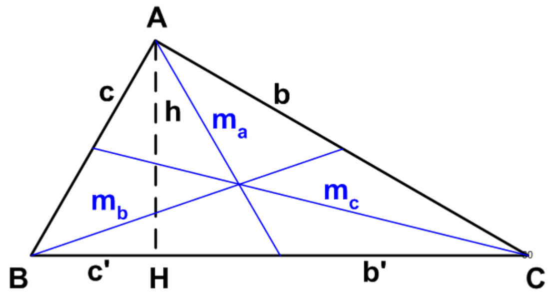
$$CB=\sqrt{(76.4+124.3)^2+(54.1-114.3)^2}=209.5 \text{ m}$$

Le 26 mars 05

EXTRI152– Louvain, septembre 2004.

Dans un triangle *ABC*, rectangle en *A*, on désigne par *h* la hauteur *AH,* par *b' = CH* et *c' = BH* les projections des côtés *b* et *c* sur l'hypoténuse. Connaissant *h* et *B*, calculer *a, b, c, b', c'* ainsi que la longueur des trois médianes.





On a $c = \dfrac{h}{\sin B}$ $\quad c' = \dfrac{h}{\tan B}$ $\quad b = \dfrac{h}{\cos B}$ $\quad b' = h \tan B$

$$\to a' = c' + b' = h\left(\frac{1}{\tan B} + \tan B\right) = \frac{h}{\sin B \cos B}$$

et pour les médianes

$$m^2{}_c = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{h^2}{4\sin^2 B} + \frac{h^2}{\cos^2 B} = \frac{h^2}{4\sin^2 B\cos^2 B}\left(1 + 3\sin^2 B\right)$$

$$\to m_c = \frac{h}{2\sin B\cos B}\sqrt{1 + 3\sin^2 B}$$

$$m^2{}_b = c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4\sin^2 B\cos^2 B}\left(1 + 3\cos^2 B\right)$$

$$\to m_b = \frac{h}{2\sin B\cos B}\sqrt{1 + 3\cos^2 B}$$

et pour la dernière médiane on a simplement puisque le triangle est rectangle:

$$m_a = \frac{a}{2} = \frac{h}{\sin B\cos B}$$

---

le 26 mars 2005

EXTRI153– Louvain, septembre 2004.

Si $a + b + c = \pi$, vérifier que

$$\cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2 c = 1 - 2\sin a \sin b \cos c$$

Puisque $c = \pi - (a+b)$, $\cos c = -\cos(a+b)$

Développons les deux membres :

$\cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2 c = 1 - 2\sin a \sin b \cos c$

$\cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2 (a+b) = \cos^2 a + \sin^2 a + 2\sin a \sin b \cos(a+b)$

$\cos^2 b - \cos^2 a \cos^2 b + 2\sin a \sin b \cos a \cos b - \sin^2 a \sin^2 b$

$= \sin^2 a + 2\sin a \sin b \cos a \cos b - 2\sin^2 a \sin^2 b$

$\cos^2 b\left(1 - \cos^2 a\right) = \sin^2 a - \sin^2 a \sin^2 b$

$\cos^2 b \sin^2 a = \sin^2 a - \sin^2 a \sin^2 b$

$-\sin^2 a\left(1 - \cos^2 b\right) = -\sin^2 a \sin^2 b$

$\sin^2 a \sin^2 b = \sin^2 a \sin^2 b$ $\quad \rightarrow$ La relation est vérifiée

---

Le 27 mars 2005

EXTRI154 – Louvain, septembre 2004.

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est toujours vraie, ou faux si l'affirmation est toujours fausse, ou complétez par une condition qui rende l'affirmation vraie :

1) Si $a,\ b,\ c$ sont positifs et $a < b + c$, alors il existe un triangle avec cotés $a,\ b,\ c$.

Toujours vrai : O   Toujours faux : O

Vrai si :

2) La droite passant par un sommet d'un triangle et le coupant en deux parties de surfaces égales est une bissectrice.

Toujours vrai : O   Toujours faux : O

Vrai si :

3) Pour $\frac{\pi}{4} < A < \frac{\pi}{2},\quad \cos A \sin A > \frac{1}{4}$

Toujours vrai : O   Toujours faux : O

Vrai si :

4) Si la surface d'un triangle est égale à $(bc)/2$, le triangle est rectangle en A

Toujours vrai : O   Toujours faux : O

Vrai si :

---

a) Pour qu'un triangle existe, il faut que la mesure de chaque côté soit inférieure la somme des mesures des deux autres côtés et supérieure à la différence des deux autres côtés. Autrement dit, il faut que a soit le plus grand côté et que $a < b + c$ et $a > b - c$ (avec $b > c$)

b) Vrai si c'est un triangle isocèle et que la bissectrice est issue du sommet, ou bien s'il s'agit d'un triangle équilatéral.

c) $\cos A \sin A > \frac{1}{4} \to \sin 2A > \frac{1}{2} \to \frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2A < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\to \frac{\pi}{12} + k\pi < A < \frac{5\pi}{12} + k\pi \ \to$ La relation est fausse pour $\frac{5\pi}{12} < A < \frac{\pi}{2}$

d) Toujours vrai

Le 26 mars 2005. Modifié le 1 juillet 2018.

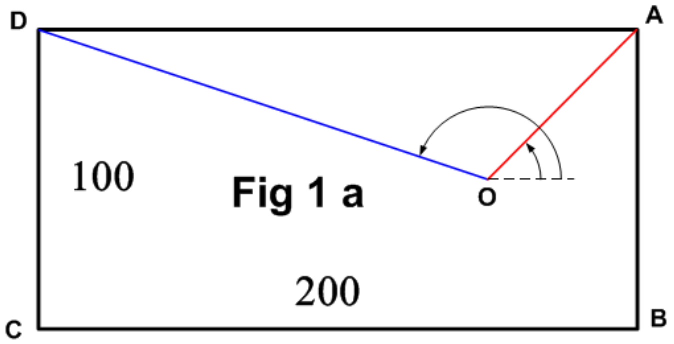
EXTRI155 – EPL, UCL, LLN, septembre 2004.

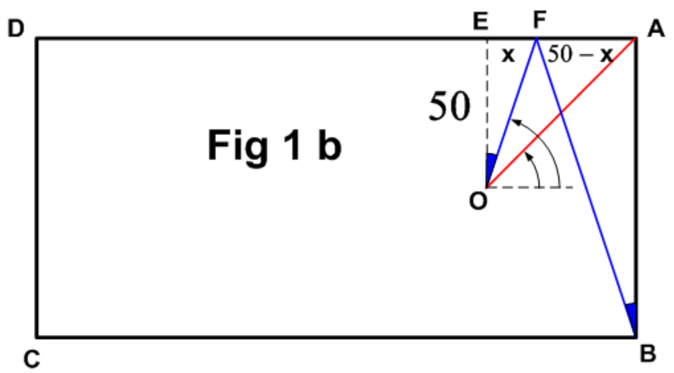
Sur une table de billard de 100 centimètres sur 200 centimètres, se trouve une balle à 50 centimètres de la bande de droite et à 50centimètres de la bande du dessous.

- Sous quels angles *f* puis-je lancer la balle pour que je touche d'abord la bande du dessus ?
- Sous quels angles *f* puis-je lancer la balle pour que je touche la bande du dessus et puis la bande de droite ?
- Sous quels angles *f* puis-je lancer la balle pour que je touche la bande du dessus, puis la bande de droite et puis la bande du dessous.
- Sous quels angles *f* puis-je lancer la balle pour que je touche d'abord la bande du dessus, puis la bande de droite, puis la bande du dessous et finalement la bande de gauche ?

Il faut exclure les cas où la bande touche deux bandes simultanément.

NB : une balle rebondit contre une bande selon un angle réfléchi égal à l'angle d'incidence.



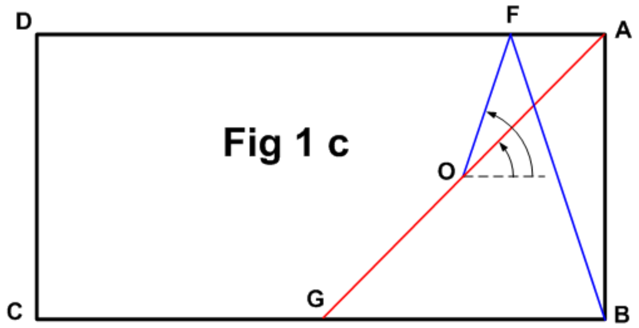


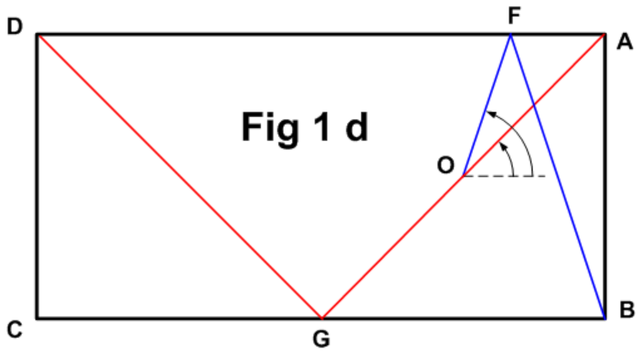
a) Il est facile de calculer que la condition est : $45° > f > \arctan\frac{150}{50} + 90$

$\rightarrow 45° < f < 161,6°$

b) les angles EOF et FBA sont égaux $\rightarrow \frac{x}{50} = \frac{50-x}{100} \rightarrow x = \frac{50}{3}$

et par conséquent la condition sera : $45° < f < 90 - \arctan\frac{50}{3 \times 50} = 71.56°$





c) Si la bille arrive en A ($f = 45°$), elle rebondit en passant par O, et touchera la bande du bas en G, milieu de BC.

$\rightarrow$ Les conditions sont les mêmes.: $45° < f < 71.56°$

d) Si la bille rebondit en G, elle arrivera en D.

Or il faut exclure les cas où la balle touche deux bandes simultanément, ce que traduit le condition : $45° < f$.

En conclusion il n'est pas possible de toucher les quatre bandes dans l'ordre demandé.

Le 26 mars 2005

EXTRI156 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2004.

Résoudre dans [0,2π] l'inéquation

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x > \sqrt{2}$$

$\sin x + \sqrt{3}\cos x > \sqrt{2} \quad (1)$

Soit $\tan\varphi = \sqrt{3} \rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3} \rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{2}$

Donc (1) devient : $\sin x + \tan\varphi \cos x > \sqrt{2}$

Multiplions par $\cos\varphi$ qui est positif : $\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x > \sqrt{2}\cos\varphi$

$\rightarrow \sin(x+\varphi) > \sqrt{2}\cos\varphi \rightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ce qui nous donne, puisque nous sommes dans l'intervalle $[0,2\pi]$

$\dfrac{\pi}{4} < x + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{3\pi}{4} \rightarrow \boxed{-\dfrac{\pi}{12} < x < \dfrac{5\pi}{12}}$

---

11 juillet 2005

EXTRI157 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2005

Un observateur relève l'angle $\alpha = 72°$ avec lequel il aperçoit la silhouette d'un arbre AB. L'œil de l'observateur est situé au point Q placé à une hauteur $|PQ| = 1.8$ m du sol. On mesure également la distance $|PB| = 10.21$ m qui sépare l'observateur du pied de l'arbre.
Quelle est la hauteur de l'arbre ?

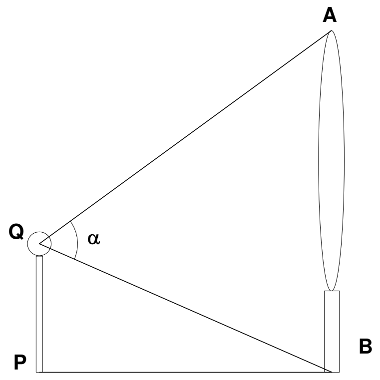


Figure 1 : Mesure de la hauteur d'un arbre

$$|QB|^2 = |QP|^2 + |PB|^2$$

$$QBA = \arctan\frac{|PB|}{|QP|} = \arctan\frac{10.21}{1.8} = 80°$$

$$\frac{|AB|}{\sin BQA} = \frac{|QB|}{\sin QAB} \to |AB| = \sqrt{|QP|^2 + |PB|^2}\,\frac{\sin BQA}{\sin\left(BQA + QBA\right)}$$

$$\to |AB| = \sqrt{10.21^2 + 1.8^2}\,\frac{\sin 72}{\sin(72+80)} = 21\,m$$

---

7 août 2005

EXTRI158 – Liège, juillet 2005

Résoudre l'équation suivante :

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} \to \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x\right) = \frac{5}{8}$$

$$\to \left(1-\cos^2 x\right)^2 - \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$$

$$\to 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$$

$$\to \cos^2 x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$$

$$1)\ \cos x = \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \to \begin{cases} x = \pm 22.5° + k360° \\ x = \pm 157.5° + k360° \end{cases}$$

$$2)\ \cos x = \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \to \begin{cases} x = \pm 67.5° + k360° \\ x = \pm 112.5° + k360° \end{cases}$$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle

---

11 juillet 2005. Modifié le 2 juillet 2006 (Thibaud Derochette)

EXTRI159 – Liège, juillet 2005

Démontrer l'égalité suivante :

$$\arctan a + \arctan \frac{1-a}{1+a} = \frac{\pi}{4}$$

$CE: a \neq -1$

Il suffit de vérifier : $\tan\left(\arctan a + \arctan \frac{1-a}{1+a}\right) = 1 \qquad (1)$

$$\rightarrow \frac{\tan \arctan a + \tan \arctan \frac{1-a}{1+a}}{1 + \tan \arctan a . \tan \arctan \frac{1-a}{1+a}} = \frac{a + \frac{1-a}{1+a}}{1 + a\frac{1-a}{1+a}} = \frac{a + a^2 + 1 - a}{1 + a - a + a^2} = 1$$

<u>Discussion</u>

Pour simplifier posons $\begin{cases} x = \arctan a. & \text{Par définition, } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ y = \arctan \frac{1-a}{1+a}. & \text{Par définition, } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

L'équation (1) devient $\tan(x+y) = 1$, qui a pour solutions $x + y = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Or $x + y \in \left]-\pi, \pi\right[$, donc on pourrait avoir $x + y = \frac{\pi}{4}$ ou bien $x + y = -\frac{3\pi}{4}$

Mais seul la première solution, nous intéresse.

Quelles sont les valeurs de a qui correspondent à $x + y = \frac{\pi}{4}$?

$a > 0 \quad \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x + y < \pi \quad \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{4} \qquad$ OK

$a = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \quad \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x + y < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{4} \qquad$ OK

$a < 0 \quad \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x < 0 \quad \Rightarrow -\pi < x + y < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ x + y = -\frac{3\pi}{4} \end{cases}$

$a > -1 \quad \Rightarrow \frac{1-a}{1+a} > 0 \quad \Rightarrow 0 < y < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x + y < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{4} \qquad$ OK

$a = -1$ A rejeter (CE)

$a < -1 \quad \Rightarrow \frac{1-a}{1+a} < 0 \quad \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < y < 0 \quad \Rightarrow -\pi < x + y < 0 \quad \Rightarrow x + y = -\frac{3\pi}{4} \qquad$ ~~OK~~

Conclusion : La relation est vraie pour $a > -1$

---

7 août 2005. Modifié le 3 juillet 2006 (Thibaud Derochette)