Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 16

EXTRI160-EXTRI169

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Aout 05

EXTRI160 – Liège, juillet 2005

Montrer que si les angles x et y vérifient

$$\tan^2 x = 2\tan^2 y + 1$$

alors on a l'égalité

$$\cos 2x + \sin^2 y = 0$$

$$\tan^2 x = 2\tan^2 y + 1 \to \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2\sin^2 y}{\cos^2 y} + 1$$
$$\to \sin^2 x\cos^2 y = 2\sin^2 y\cos^2 x + \cos^2 x\cos^2 y$$
$$\to \sin^2 x\cos^2 y = \cos^2 x\left(2\sin^2 y + \cos^2 y\right)$$
$$\to \sin^2 x\cos^2 y = \cos^2 x\left(1 + \sin^2 y\right)$$
$$\to \sin^2 x\left(1 - \sin^2 y\right) = \left(1 - \sin^2 x\right)\left(1 + \sin^2 y\right)$$
$$\to \sin^2 x = \sin^2 y + 1 - \sin^2 x$$
$$\to \sin^2 y + 1 - 2\sin^2 x = 0$$
$$\to \sin^2 y + \cos 2x = 0$$

---

7 août 2005

EXTRI161 – Mons, juillet 2005

Démontrer que la relation suivante est vérifiée

$$\cos 2x = \frac{1}{1+\tan x \tan 2x}$$

$$\frac{1}{1+\tan x\tan 2x} = \frac{1}{1+\tan x\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}} = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{1-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}$$

$$= \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = -\cos 2x = \cos 2x$$

---

15 août 2005

EXTRI162 – Mons, juillet 2005

Résoudre l'équation trigonométrique suivante

$$\sin 3x + \sin 4x - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0$$

$\sin 3x + \sin 4x - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 0 \rightarrow \sin 3x + \sin 4x - \sin x = 0$

$\rightarrow 2\cos 2x \sin x + 2\sin 2x + \cos 2x = 0$

1) $\cos 2x = 0 \rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$

Il reste : $\sin x + \sin 2x = 0 \rightarrow \sin x(1 + 2\cos x) = 0$

2) $\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$

3) $1 + 2\cos x = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \pi \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

---

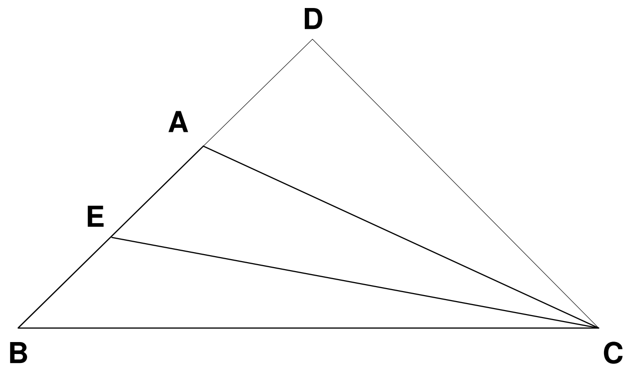
15 août 2005

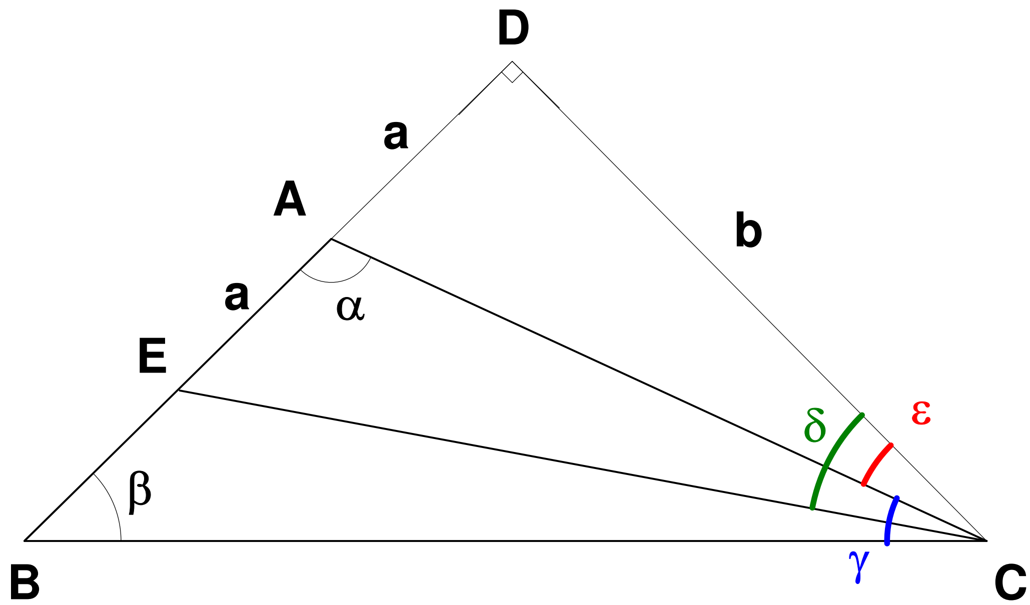
EXTRI163 – ERM, 2004

Dans le triangle ABC , on a angle $A = \alpha > 90°$. La hauteur issue de C coupe le prolongement du côté [AB] en D et la bissectrice de l'angle C coupe [AB] en E (voir figure). De plus, on pose angle $B = \beta$.
On demande :

a) Exprimer l'angle ECD en fonction de α et β
b) De démontrer que si $|AD| = |AE|$, on a

$$\tan^3 \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = 1$$





Les angles et les longueurs sont définit à la figure 2. On a :

a) $\left.\begin{array}{l}\delta+\dfrac{\gamma}{2}+\beta=\dfrac{\pi}{2}\rightarrow\delta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\gamma}{2}-\beta \\ \alpha+\beta+\gamma=\pi\ \rightarrow\gamma=\pi-\beta-\alpha\quad(1)\end{array}\right\}\rightarrow\boxed{\delta=\dfrac{\alpha-\beta}{2}}\qquad(2)$

b) Dans le triangle rectangle $ADC\rightarrow\tan\varepsilon=\dfrac{a}{b}$

or $\varepsilon=\delta-\dfrac{\gamma}{2}\rightarrow$ avec (1) et (2): $\varepsilon=\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\alpha}{2}=\alpha-\dfrac{\pi}{2}$

Donc $\tan\varepsilon=\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{a}{b}\qquad(3)$

Dans le triangle rectangle $EDC\rightarrow\tan\delta=\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\dfrac{2a}{b}\ \ (4)$

De (3) et $(4)\rightarrow\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}=-\dfrac{2}{\tan\alpha}\rightarrow\dfrac{\tan\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}=-\dfrac{2}{\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}}$

$$\rightarrow\left(\tan\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\beta}{2}\right)\tan\frac{\alpha}{2}=-\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\rightarrow\tan^2\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=-1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}$$

$$\rightarrow\boxed{\tan^3\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=1}$$

EXTRI164 – ERM, Bruxelles, 2004

Dans le triangle ABC, on donne $A=\frac{\pi}{3}$ et le rapport $\frac{b}{c}=2+\sqrt{3}$ où $b=|AC|$ et $c=|AB|$.

On demande de calculer la tangente de l'angle $\frac{B-C}{2}$ puis les angles B et C.

Comme on demande uniquement les angles, posons $c=1\to b=2+\sqrt{3}$

a) Observons que : $A+B+C=\pi\to B-C=\pi-A-2C=\frac{2\pi}{3}-2C\to\frac{B-C}{2}=\frac{\pi}{3}-C$

$$\to\tan\frac{B-C}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-C\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan C}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan C}=\frac{\sqrt{3}-\tan C}{1+\sqrt{3}\tan C}\quad(1)$$

b) Calculons C

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1-\left(2+\sqrt{3}\right)=6+3\sqrt{3}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}\to 1=6+3\sqrt{3}+4+4\sqrt{3}+3-2\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{6+\sqrt{3}}\cos\widehat{C}$$

$$\to\cos\widehat{C}=\frac{12+7\sqrt{3}}{2\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{6+\sqrt{3}}}=\frac{\left(12+7\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{6+3\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{6+3\sqrt{3}}}=\frac{\left(2\sqrt{3}+3\right)\sqrt{6+3\sqrt{3}}}{2\left(6+3\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{3}+3\right)\left(6-3\sqrt{3}\right)\sqrt{6+3\sqrt{3}}}{2\left(36-27\right)}=\frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{6+3\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{18}{36}+\frac{9\sqrt{3}}{36}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Et par conséquent : $\widehat{C}=15°=\frac{\pi}{12}\to\widehat{B}=105°=\frac{7\pi}{12}$

Revenons à la formule (1):

$$\cos\widehat{C}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\to\sin^2\widehat{C}=1-\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\to\sin\widehat{C}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\to\tan\widehat{C}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

Finalement, $(1)\to\tan\widehat{\frac{B-C}{2}}=\frac{\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{2\sqrt{3}-2}{-2+2\sqrt{3}}=1$

Solution proposée par Hugues Vermeiren

On a immédiatement $\widehat{B}+\widehat{C}=180° - \widehat{A}=120°$
Si on trouve une autre équation liant $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$, on disposera d'un système 2×2 dont on tirera $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
De $b+c=3+\sqrt{3}$, on tire, en utilisant la loi des sinus

$$a\cdot\frac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}}+a\cdot\frac{\sin\widehat{C}}{\sin\widehat{A}}=3+\sqrt{3}$$

$$\sin\widehat{B}+\sin\widehat{C}=\frac{1}{a}\sin\widehat{A}\,(3+\sqrt{3})$$

$$2\sin\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}\cdot\cos\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{a}\cdot 2\sin\frac{\widehat{A}}{2}\cos\frac{\widehat{A}}{2}\qquad(1)$$

Comme $\sin\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}=\sin\frac{\pi-\widehat{A}}{2}=\cos\frac{\widehat{A}}{2}$, (1) s'écrit :

$$\cos\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{a}\cdot\sin\frac{\widehat{A}}{2}\qquad(2)$$

$\sin\frac{\widehat{A}}{2}=\sin 30°=\frac{1}{2}$ et par le théorème d'Al-Kashi, on a :

$$a^2=1+(2+\sqrt{3})^2-2\,(2+\sqrt{3})\,\cos 30°=6+3\sqrt{3}\,.$$

Et donc (2) devient : $\cos\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6+\sqrt{3}}}$

On obtient $\tan\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$ grâce à la relation $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2 x}$.

$$\tan^2\left(\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}\right)=4\cdot\frac{6+\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})^2}-1\underset{\text{Petit calculs}}{=}1$$

L'angle $\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$ est donc égal à 45° ou 135.

Le système $\begin{cases}\widehat{B}+\widehat{C}=120\\(\widehat{B}-\widehat{C})/2=45\end{cases}$ conduit à $\widehat{B}=105°$ et $\widehat{C}=15°$.

Le système $\begin{cases}\widehat{B}+\widehat{C}=120\\(\widehat{B}-\widehat{C})/2=135\end{cases}$ fournit $\widehat{B}=195°$, un peu grand pour un triangle !

Remarque : On aurait pu calculer les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ (plus ou moins) directement puisqu'on connaît les trois côtés mais la consigne de l'énoncé est de d'abord calculer $\tan\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$.

15 août 2005. Modifié le 10 septembre 2015 (Hugues Vermeiren)

EXTRI165 – Pol, ERM, Bruxelles 2003.

1) Démontrer que

$$\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\sin x$$

Solution proposée par Hugues Vermeiren

a) Puisque $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a} \rightarrow \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}\tan^2\frac{\pi}{12}+2\tan\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{3}=0 \rightarrow \tan^2\frac{\pi}{12}+2\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{12}-1=0$$

$$\rightarrow \tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin x} = \sin\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}\sin x$

$CE: x \neq k\pi$

$\rightarrow \sqrt{3} = -\cos x\sin x+\sqrt{3}\sin^2 x = -\cos x \sin x+\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos^2 x$

$\rightarrow \cos^2 x+\cos x\sin x = 0$

1) $\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi$ A rejeter

2) $\cos x+\sin x = 0 \rightarrow \tan x = -1 \rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4}+k\pi$

1. Puisque $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$,

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}} \quad (E_1)$$

En posant, $x = \tan\dfrac{\pi}{12}$, (E_1) s'écrit:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2x}{1-x^2} \iff \sqrt{3}\cdot(1-x^2) = 6x \iff x^2+2\sqrt{3}x-1=0 \iff x = 2\pm\sqrt{3}$$

Comme $\tan\dfrac{\pi}{12} > 0$, $\boxed{\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}}$.

2. Comme $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$, on obtient en multipliant les deux membres par $\sin x$ (si $x \neq k\pi$) :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{\sin x}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\,\sin x &\iff \cos x\cdot\sin x+\sqrt{3}\,\sin^2 x=\sqrt{3}\\
&\iff \frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}=\sqrt{3}\\
&\iff \sin 2x-\sqrt{3}\cdot\cos 2x=\sqrt{3}
\end{aligned}$$

- On reconnaît l'équation "linéaire" : $A\cdot\sin X+B\cdot\cos X=C$ qui se résout habituellement en posant $\tan\varphi=\frac{B}{A}, A\neq 0$.
- En passant, on a utilisé la formule de Carnot : $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2\alpha)$.

$$\begin{aligned}
\sin 2x-\sqrt{3}\cdot\cos 2x=\sqrt{3} &\iff \sin 2x-\tan\frac{\pi}{3}\cdot\cos 2x=\sqrt{3}\\
&\iff \sin 2x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos 2x=\sqrt{3}\,\cos\frac{\pi}{3}\\
&\iff \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\iff 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad\text{ou}\quad 2x-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\
&\iff \boxed{x=\frac{\pi}{3}+k\,\pi \quad\text{ou}\quad x=\frac{\pi}{2}+k\,\pi}
\end{aligned}$$

Les solutions principales sont donc : $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Vérifions, par exemple que $x=\frac{\pi}{3}$ est bien une solution:

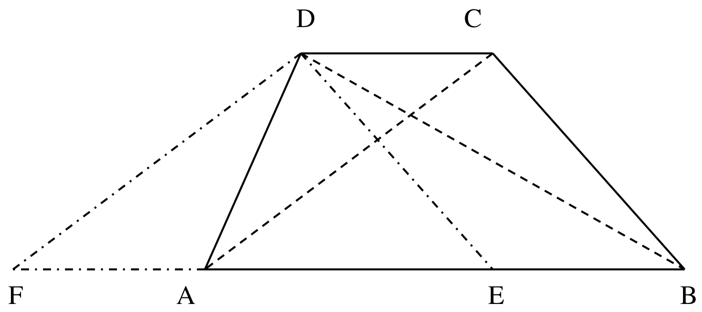
Si $x=\frac{\pi}{3}$, $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2}\overset{ok!}{=}\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

15 août 2005. Modifié le 12 octobre 2015 (Hugues Vermeiren)

EXTRI166 – LOUVAIN, septembre 2005

Dans le trapèze $ABCD$, les bases $AB = a$ et $CD = b$; les côtés parallèles sont $BC = c$ et $DA = d$, les diagonales sont $AC = m$ et $BD = n$

1) Connaissant les quatre côtés, calculer les angles.
2) Connaissant les bases et les diagonales, calculer les angles et les côtés non parallèles.



---

a) Soit DE parallèle à $CB. \to AED = ABC = B$

Nous avons dans le triangle AED

$$\begin{cases} c^2 = d^2 + (a-b)^2 - 2(a-b)d\cos A \\ d^2 = (a-b)^2 + c^2 - 2(a-b)c\cos B \end{cases} \to \begin{cases} \cos A = \dfrac{d^2 + (a-b)^2 - c^2}{2(a-b)d} & (1) \\ \cos B = \dfrac{c^2 + (a-b)^2 - d^2}{2(a-b)c} & (2) \end{cases}$$

b) Nous avons aussi

$$\begin{cases} \Delta DAC \to m^2 = d^2 + b^2 - 2bd\cos \widehat{D} & (3) \\ \Delta ABC \to m^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos \widehat{B} & (4) \\ \Delta ABD \to n^2 = d^2 + a^2 - 2ad\cos \widehat{A} & (5) \\ \Delta BCD \to n^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \widehat{C} & (6) \end{cases}$$

Notons que $\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{D}$ et $\cos \widehat{B} = -\cos \widehat{C}$ car ce sont des angles supplémentaires

Nous pouvons donc éliminer $\cos \widehat{A}$ et $\cos \widehat{D}$ entre (3) et (5)

$$\to \frac{m^2 - d^2 - b^2}{2bd} = \frac{n^2 - d^2 - a^2}{-2ad} \to a\left(m^2 - d^2 - b^2\right) = -b\left(n^2 - d^2 - a^2\right)$$

$$\to (a+b)d^2 = am^2 + bn^2 - ab(a+b) \to d^2 = \frac{am^2 + bn^2}{a+b} - ab \quad (7)$$

En éliminant $\cos \widehat{B}$ et $\cos \widehat{C}$ entre (4) et (6), nous obtenons de la même façon

$$c^2 = \frac{bm^2 + an^2}{a+b} - ab \quad (8)$$

Soit (3)-$(5) \to m^2 - n^2 = b^2 - a^2 + 2d(a+b)\cos A$

$$\to \cos A = \frac{m^2 - n^2 + a^2 - b^2}{2d(a+b)}$$

Avec (7), et en rentrant le $(a+b)$ dans la racine

$$\to \cos A = \frac{m^2 - n^2 + a^2 - b^2}{2\sqrt{(a+b)(am^2+bn^2)-(a+b)^2 ab}}$$

$$= \frac{m^2 - n^2 + a^2 - b^2}{2\sqrt{(a+b)\left[a(m^2-b^2)+b(n^2-a^2)\right]}}$$

On trouve une formule similaire pour cos $\widehat{B}$

$$\cos \widehat{B} = \frac{n^2 - m^2 + a^2 - b^2}{2\sqrt{(a+b)\left[b(m^2-a^2)+a(n^2-b^2)\right]}}$$

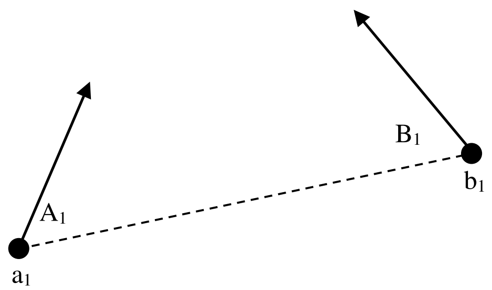
$\widehat{C}$ est le supplémentaire de $\widehat{B}$, et $\widehat{D}$ celui de $\widehat{A}$

---

15 novembre 2005

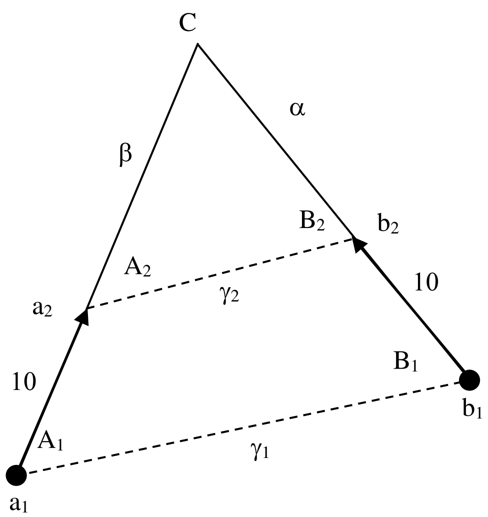
EXTRI167 – EPL, UCL, LLN, septembre 2005

Deux bateaux a et b naviguent à la même vitesse, mais dans deux directions différentes. Ils s'observent l'un l'autre et mesurent chacun l'angle de sa propre trajectoire et la direction sous laquelle il observe l'autre bateau : au temps t_1 par exemple, les bateaux se trouvent en a_1 et b_1 et les angles A_1 et B_1 mesurés sont indiqués dans le dessin suivant.



Au temps t_2 les bateaux ont parcouru chacun 10 km dans leurs directions initiales et ils se trouvent en a_2 et b_2 et mesurent de la même façon deux nouveaux angles A_2 et B_2.

1. Démontrez que les angles satisfont $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$
2. Faites un croquis de la situation pour expliquer ce résultat
3. Trouvez comment calculer les distances a_1b_1 et a_2b_2 à partir des angles A_1, B_1, A_2, B_2
4. Faites le calcul pour des angles $A_1 = 80°, B_1 = 70°, A_2 = 84°, B_2 = 65°$



1) Nous avons immédiatement : $A_1 + B_1 + C = \pi = A_2 + B_2 + C \to A_1 + B_1 = A_2 + B_2$

2) Appliquons les formules des sinus en tenant compte que

$\sin C = \sin\left(\pi - C\right) = \sin\left(A_1 + B_1\right) = \sin\left(A_2 + B_2\right)$

$$\begin{cases} \Delta a_2 c b_2 \to \dfrac{\sin\left(A_2+B_2\right)}{\gamma_2} = \dfrac{\sin A_2}{\alpha} = \dfrac{\sin B_2}{\beta} \to \begin{cases} \alpha = \gamma_2 \dfrac{\sin A_2}{\sin\left(A_2+B_2\right)} & (1) \\ \beta = \gamma_2 \dfrac{\sin B_2}{\sin\left(A_2+B_2\right)} & (2) \end{cases} \\ \Delta a_1 c b_1 \to \dfrac{\sin\left(A_1+B_1\right)}{\gamma_1} = \dfrac{\sin A_1}{\alpha+10} = \dfrac{\sin B_1}{\beta+10} \to \begin{cases} (\alpha+10)\sin\left(A_1+B_1\right) = \gamma_1 \sin A_1 & (3) \\ (\beta+10)\sin\left(A_1+B_1\right) = \gamma_1 \sin B_1 & (4) \end{cases} \end{cases}$$

Utilisons (1) et (2) pour remplacer dans (3) et (4)

$$\begin{cases} \left(\gamma_2 \dfrac{\sin A_2}{\sin\left(A_2+B_2\right)} + 10\right)\sin\left(A_1+B_1\right) = \gamma_1 \sin A_1 & (5) \\ \left(\gamma_2 \dfrac{\sin B_2}{\sin\left(A_2+B_2\right)} + 10\right)\sin\left(A_1+B_1\right) = \gamma_1 \sin B_1 & (6) \end{cases}$$

Divisons (5) et (6) membre à membre

$$\to \frac{\gamma_2 \sin A_2 + 10\sin\left(A_2+B_2\right)}{\gamma_2 \sin B_2 + 10\sin\left(A_2+B_2\right)} = \frac{\sin A_1}{\sin B_1}$$

qui est une équation en γ_2 et qu'il est facile de résoudre

$$\to \gamma_2 \sin A_2 + 10\sin\left(A_2+B_2\right) = \gamma_2 \sin B_2 \frac{\sin A_1}{\sin B_1} + 10\sin\left(A_2+B_2\right)\frac{\sin A_1}{\sin B_1}$$

$$\to \left(\sin A_2 - \sin B_2 \frac{\sin A_1}{\sin B_1}\right)\gamma_2 = 10\sin\left(A_2+B_2\right)\left(\frac{\sin A_1}{\sin B_1} - 1\right)$$

$$\to \boxed{\gamma_2 = \frac{10\sin\left(A_2+B_2\right)\left(\sin A_1 - \sin B_1\right)}{\sin A_2 \sin B_1 - \sin B_2 \sin A_1}}$$

Pour γ_1, repartons de (5) et (6). Eliminons γ_2

$$\begin{cases} \gamma_2 \dfrac{\sin A_2}{\sin\left(A_2+B_2\right)} = \gamma_1 \dfrac{\sin A_1}{\sin\left(A_1+B_1\right)} - 10 & (7) \\ \gamma_2 \dfrac{\sin B_2}{\sin\left(A_2+B_2\right)} = \gamma_1 \dfrac{\sin B_1}{\sin\left(A_1+B_1\right)} - 10 & (8) \end{cases}$$

Divisons (7) et (8) membre à membre

$$\rightarrow \frac{\gamma_1 \dfrac{\sin A_1}{\sin\left(A_1+B_1\right)} - 10}{\gamma_1 \dfrac{\sin B_1}{\sin\left(A_1+B_1\right)} - 10} = \frac{\sin A_2}{\sin B_2}$$

qui est une équation en γ_1 et qu'il est facile de résoudre

$$\rightarrow \left(\frac{\sin A_2}{\sin B_2} \frac{\sin B_1}{\sin\left(A_1+B_1\right)} - \frac{\sin A_1}{\sin\left(A_1+B_1\right)} \right) \gamma_1 = 10 \left(\frac{\sin A_2}{\sin B_2} - 1 \right)$$

$$\rightarrow \boxed{\gamma_1 = \frac{10 \sin\left(A_1+B_1\right)\left(\sin A_2 - \sin B_2\right)}{\sin A_2 \sin B_1 - \sin B_2 \sin A_1}}$$

Appliquons ces formules :

$$\gamma_1 = \frac{10 \sin(80+70)(\sin 85 - \sin 65)}{\sin 85 \sin 70 - \sin 80 \sin 65} = 10.31 \text{ km}$$

$$\gamma_2 = \frac{10 \sin(85+65)(\sin 80 - \sin 70)}{\sin 85 \sin 70 - \sin 80 \sin 65} = 5.18 \text{ km}$$

EXTRI168 – EPL, UCL, LLN, septembre 2005.

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est toujours vraie, ou faux si l'affirmation est toujours fausse, ou complétez par une condition qui rende l'affirmation vraie :

1) Le plus grand angle d'un triangle est supérieur ou égal à 60°

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

2) Pour $0 < x < \pi$, $\cos 2x + \sin 2x + 1 > 0$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

3) Dans un triangle ABC, on a $\tan^2 \frac{A}{2} = \tan^2 \frac{B}{2}$

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

4) Un triangle est isocèle si une de ses bissectrices est également une médiane.

Toujours vrai : O Toujours faux : O

Vrai si :

a) Toujours vrai.

En effet, soit A le plus grand angle. Donc, $\begin{cases} A \geq B \\ A \geq C \end{cases}$

$\rightarrow A+B+C=180° \rightarrow 3A \geq 180° \rightarrow A \geq 60$

b) $\cos 2x+\sin 2x+1>0 \rightarrow \cos^2 x-\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x>0$

$\rightarrow 2\cos^2 x+2\sin x\cos x>0 \rightarrow \cos x(\cos x+\sin x)>0$

Tableau de signe

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos x$	1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$\cos x+\sin x$	1	$+$	1	$+$	0	$-$	-1
$\cos x(\cos x+\sin x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0

Conclusion : $\cos 2x+\sin 2x+1>0$ si $\begin{cases} 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{4} < x < \pi \end{cases}$

c) $\tan^2 \frac{A}{2} = \tan^2 \frac{B}{2}$

• 1) $\tan \frac{A}{2} = \tan \frac{B}{2} \rightarrow A = B$ et le triangle est isocèle

• 2) $\tan \frac{A}{2} = -\tan \frac{B}{2} = \tan\left(\pi - \frac{B}{2}\right) \rightarrow A+B = 2\pi$ et le triangle est plat

$\rightarrow \frac{\pi}{12}+k\pi < A < \frac{5\pi}{12}+k\pi \ \rightarrow$ La relation est fausse pour $\frac{5\pi}{12} < A < \frac{\pi}{2}$

d) Toujours vrai

En effet, soit M le milieu de la base BC d'un triangle. M est en même temps équidistant des côtés AB et AC (car situé sur la bissectrice) et des sommets B et C (car situé sur la médiane). on en déduit que le triangle est isocèle

EXTRI169 – Liège, septembre 2005.

Sans l'aide de la calculatrice, calculer la valeur numérique de E :

$$E=\cos^2\frac{\pi}{10}-\sin^2\frac{2\pi}{10}+\cos^2\frac{3\pi}{10}-\sin^2\frac{4\pi}{10}$$

Méthode 1

$$E=\cos^2\frac{\pi}{10}-\sin^2\frac{2\pi}{10}+\cos^2\frac{3\pi}{10}-\sin^2\frac{4\pi}{10}$$
$$=\left(\cos\frac{\pi}{10}+\sin\frac{2\pi}{10}\right)\left(\cos\frac{\pi}{10}-\sin\frac{2\pi}{10}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{10}+\sin\frac{4\pi}{10}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{4\pi}{10}\right)$$

Regardons cela de plus près :

1er facteur, 1er terme : $\cos\frac{\pi}{10}+\sin\frac{2\pi}{10}=\cos\frac{\pi}{10}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}$

2ème facteur, 1er terme : $\cos\frac{\pi}{10}-\sin\frac{2\pi}{10}=\cos\frac{\pi}{10}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{10}-\cos\frac{3\pi}{10}$

1er facteur, 2ème terme : $\cos\frac{3\pi}{10}+\sin\frac{4\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{10}\right)=\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{10}$

2ème facteur, 2ème terme : $\cos\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{4\pi}{10}=\cos\frac{3\pi}{10}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{10}\right)=\cos\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{10}$

Conclusion :

$$E=\left(\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(\cos\frac{\pi}{10}-\cos\frac{3\pi}{10}\right)+\left(\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{10}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{10}\right)$$
$$=\left(\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}\right)\left(\cos\frac{\pi}{10}-\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{10}\right)=0$$

Méthode 2

Solution proposée par Thibaud Derochette

$\frac{\pi}{10}$ et $\frac{4\pi}{10}$ sont complémentaires, donc : $\sin\frac{4\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{10}$

De même:

$\frac{3\pi}{10}$ et $\frac{2\pi}{10}$ sont complémentaires, donc : $\cos\frac{3\pi}{10} = \sin\frac{2\pi}{10}$

Par conséquent:

$$\begin{aligned} E &= \cos^2\frac{\pi}{10} - \sin^2\frac{2\pi}{10} + \cos^2\frac{3\pi}{10} - \sin^2\frac{4\pi}{10} \\ &= \cos^2\frac{\pi}{10} - \cos^2\frac{3\pi}{10} + \cos^2\frac{3\pi}{10} - \cos^2\frac{\pi}{10} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le 10 décembre 2005. Modifié le 3 juillet 2006 (Thibaud Derochette)