

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 18

EXTRI180-EXTRI189

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 08

EXTRI180 – Liège, juillet 2006.

On désire trouver analytiquement la valeur de $\sin(\pi/10)$ sous forme d'une expression contenant éventuellement des radicaux. A cette fin, on procédera comme suit.

- 1) En posant $A = \pi/10$, montrer que $\cos 3A = \sin 2A$
 - 2) Développer l'équation précédente en termes de $\cos A$ et $\sin A$
 - 3) L'équation obtenue peut se ramener à une équation du second degré en $\sin A$, que l'on résoudra. Faire le bon choix entre les deux solutions possibles.
-

1) C'est immédiat puisque $\frac{3\pi}{10}$ et $\frac{2\pi}{10}$ sont des angles complémentaires.

2) Calculons $\cos 3A$.

$$\begin{aligned}\cos 3A &= \cos(2A + A) = \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A \\ &= (2 \cos^2 A - 1) \cos A - 2 \sin^2 A \cos A = 2 \cos^3 A - \cos A - 2(1 - \cos^2 A) \cos A \\ &= 4 \cos^3 A - 3 \cos A\end{aligned}$$

3) On a alors : $\cos 3A = \sin 2A \rightarrow 4 \cos^3 A - 3 \cos A = 2 \sin A \cos A$

Comme $\cos A \neq 0$, on peut simplifier par $\cos A$

$$\rightarrow 4 \cos^2 A - 3 = 2 \sin A \rightarrow 4 - 4 \sin^2 A - 3 = 2 \sin A \rightarrow 4 \sin^2 A + 2 \sin A - 1 = 0$$

Cette équation a pour solutions :

$$\begin{cases} \sin A = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) \\ \sin A = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) < -1 \quad \text{A rejeter} \end{cases}$$

5 juillet 06

EXTRI181 – Liège, juillet 2006.

Résoudre l'équation :

$$\left(\frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right)^2 + \sin x = 0$$

$$\text{CE : } \begin{cases} 1 - \tan \frac{x}{2} \neq 0 \rightarrow \tan \frac{x}{2} \neq 1 \rightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \tan \frac{x}{2} \neq \infty \rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

$$\left(\frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right)^2 + \sin x = 0 \rightarrow \left(\frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right)^2 + \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = 0$$

$$\text{Posons : } y = \tan \frac{x}{2}. \text{ L'équation s'écrit } \left(\frac{1+y}{1-y} \right)^2 + \frac{2y}{1+y^2} = 0$$

$$\rightarrow (1+y)^2(1+y^2) + 2y(1-y)^2 = 0 \rightarrow y^4 + 4y^3 - 2y^2 + 4y + 1 = 0$$

$$\text{En groupant les termes de façon adéquate : } (y^2 - 1)^2 + 4y(y^2 + 1) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Or } y^2 + 1 = \frac{1}{1 + \cos^2 \frac{x}{2}}. \text{ Donc (1) s'écrit } \left(\frac{\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right)^2 + \frac{4 \tan \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos^4 \frac{x}{2}} + \frac{4 \sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}} = 0 \rightarrow \cos^2 x + 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \rightarrow 1 - \sin^2 x + 2 \sin x = 0$$

Cette équation a pour solutions

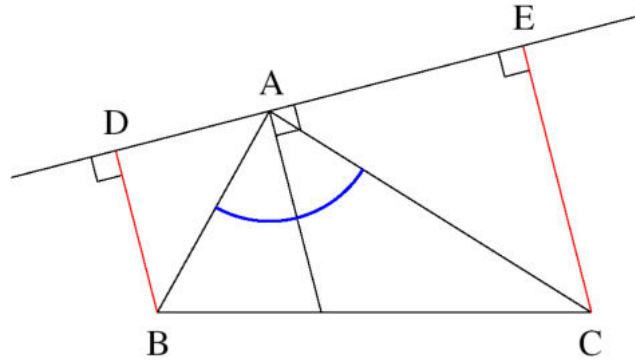
$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{2} + 1 > 1 \quad \text{A rejeter} \\ \sin x = 1 - \sqrt{2} \rightarrow \begin{cases} x = -0.427 + 2k\pi \\ x = 3.569 + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

5 juillet 06. Modifié le 6 juillet (Benoît Baudalet)

EXTRI182 – Bruxelles – Juillet 2006

Dans le triangle ABC , l'angle A varie de telle sorte que la somme de la longueur de AB et la longueur de AC ($|AB| + |AC|$) reste constante. On demande de démontrer que le produit de la distance de B à la bissectrice extérieure de l'angle A par la distance de C à cette même bissectrice extérieure reste constant.

Solution proposée par Benoît BAUDELET



Soit D et E les projections orthogonales de B et C respectivement sur la bissectrice extérieure de l'angle A .

Si l'on note $\alpha = A$, on a $\angle ADB = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ et $\angle CAE = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Les triangles $\triangle ADB$ et

$\triangle AEC$ étant rectangles respectivement en D et E , on a

$$\sin \angle DAB = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \overline{AB} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

et

$$\sin \angle AEC = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{CE} = \overline{AC} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \overline{AC} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

Dés lors

$$\overline{BD} \cdot \overline{CE} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

Grâce au théorème du cosinus appliqué dans le $\triangle ABC$ et en notant la constante $\overline{AB} + \overline{AC} = k$, on a

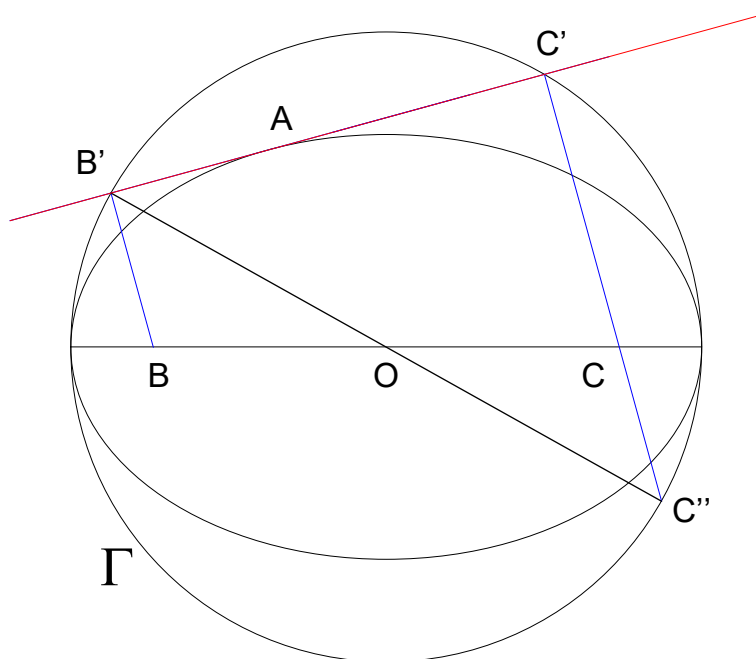
$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha \\ &= (\overline{AB} + \overline{AC})^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha \\ &= k^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} (1 + \cos \alpha) \\ &= k^2 - 4 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

D'où

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{k^2 - \overline{BC}^2}{4} = \frac{k^2 - a^2}{4} \quad (2)$$

De (1) et (2), on déduit que $\overline{BD} \cdot \overline{CE} = \frac{k^2 - a^2}{4}$ est constant

Solution alternative basée sur la géométrie synthétique



Si $|AB| + |AC| = cst$ alors A se déplace sur une ellipse de foyers B et C .
De plus, la bissectrice extérieure de l'angle A est la tangente en A à l'ellipse.

On sait également que la podaire d'une ellipse est le cercle principal Γ , qui a pour rayon a , demi grand axe de l'ellipse. (Voir rappel 1)

Par conséquent, les projetés B' et C' sur la tangente sont sur Γ .

Prologeons $C'C$ qui coupe le cercle Γ en C'' . Le triangle $B'C'C''$ étant rectangle, C'' est aussi sur le diamètre $B'O$, où O est le centre du cercle et de l'ellipse.

Les triangles OBB' et OCC'' sont égaux puisque $|OB'| = |OC''| = a$,
 $|OB| = |OC|$ et que $\overline{BOB'} = \overline{COC''}$ (Angles opposés par le sommet)
 $\rightarrow |BB'| = |CC''|$

Considérons maintenant la puissance du point C par rapport au cercle Γ .
(Voir rappel 2)

$\mathcal{P}(C, \Gamma) = |CC'| \cdot |CC''| = a^2 - c^2 = b^2$, où c est la distance $|OC|$ et b le demi petit axe de l'ellipse

$$\rightarrow \boxed{|BB'| \cdot |CC'| = b^2 = cst}$$

Rappel 1 : Podaire

On appelle podaire d'une courbe Γ par rapport à un point F , la courbe qui est le lieu des projetés de F sur les tangentes à Γ .

La podaire d'une ellipse est donc le lieu des projections des foyers de l'ellipse sur les tangentes à l'ellipse.

Soit une ellipse d'équation $E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.

Soit $t \equiv y = mx + \lambda$ l'équation en un point A de E . Remplaçons y dans E :

$$\rightarrow b^2x^2 - a^2(mx + \lambda)^2 + a^2b^2 = 0 \rightarrow (a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2m\lambda x + a^2\lambda^2 - a^2b^2 = 0$$

Pour que les racines soient égales, il faut que : $(a^2m\lambda)^2 - (a^2m^2 + b^2)(a^2\lambda^2 - a^2b^2) = 0$

$$\rightarrow a^4m^2\lambda^2 - a^4m^2\lambda^2 - a^2b^2\lambda^2 + a^4b^2m^2\lambda^2 + a^2b^4 = 0 \rightarrow a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - \lambda^2) = 0$$

$$\rightarrow \lambda = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

La quantité sous le radical étant toujours positive, λ est toujours réelle.

Les équations des tangentes sont donc : $t \equiv y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

La normale n à une tangente t de direction m , issue du foyer $(c, 0)$, a pour équation

$n \equiv y = -\frac{1}{m}(x - c)$. Le point d'intersection de n et t est donné par

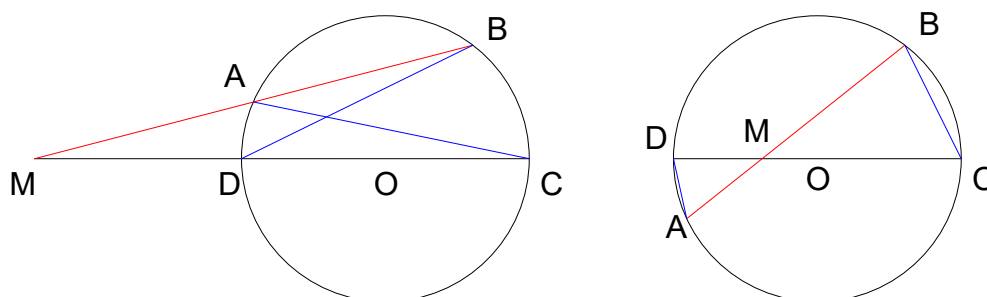
$$\begin{cases} y - mx = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2} \\ my + x = c \end{cases}. \text{ Additionnons après avoir élevé au carré. Il vient, en tenant}$$

$$\text{compte que } a^2 - b^2 = c^2 \rightarrow (m^2 + 1)(x^2 + y^2) = (m^2 + 1)a^2 \rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = a^2}$$

qui représente le cercle principal. Le second foyer donne par symétrie la même podaire.

Remarques:

- Dans le cas général, la podaire d'un point est une courbe plus compliquée.



Rappel 2 : Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit Γ un cercle de centre O , de rayon r et M un point fixe du plan.

Si une droite d passe par M et coupe le cercle en A et B , alors le produit

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = |MA| \cdot |MB| = |OM|^2 - r^2 = cst$$

Cette quantité est la puissance de M par rapport au cercle Γ : $\mathcal{P}(M, \Gamma)$

Point M extérieure au cercle

Les triangles MBD et MAC sont semblables car leurs angles correspondants sont égaux.

$$\rightarrow \frac{|MD|}{|MA|} = \frac{|MB|}{|MC|} \rightarrow |MA| \cdot |MB| = |MD| \cdot |MC|$$

$$\text{Or } |MD| = |MO| - r \text{ et } |MC| = |MO| + r \rightarrow \boxed{|MA| \cdot |MB| = |MO|^2 - r^2}$$

Point M intérieure au cercle

Les triangles MBC et MDA sont semblables car leurs angles correspondants sont égaux.

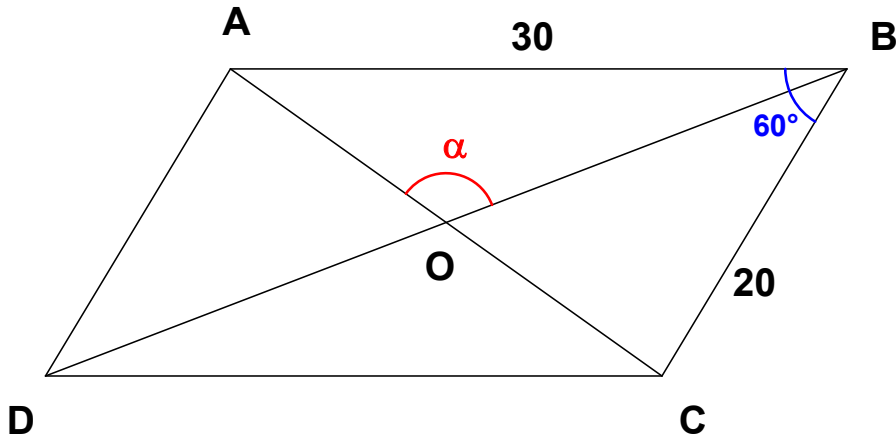
$$\rightarrow \frac{|MB|}{|MD|} = \frac{|MC|}{|MA|} \rightarrow |MA| \cdot |MB| = |MD| \cdot |MC|$$

$$\text{Or } |MD| = |MO| - r \text{ et } |MC| = |MO| + r \rightarrow \boxed{|MA| \cdot |MB| = |MO|^2 - r^2}$$

Le 19 août 2006

EXTRI183 – Mons – Juillet 2003

Dans le parallélogramme $ABCD$, on connaît les côtés $AB (=30)$, $BC (=20)$ et l'angle $B (=60^\circ)$. Calculer les diagonales, leur angle et l'aire du parallélogramme.



$$\text{Parallélogramme } ABCD \rightarrow \begin{cases} A = C \\ B = D = 60^\circ \\ A + B + C + D = 360^\circ \end{cases} \rightarrow A = C = \frac{360^\circ - 2B}{2} = 120^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Triangle } ACD \rightarrow AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 60^\circ \\ &= 900 + 400 - 2 \times 30 \times 20 \times \cos 60^\circ \rightarrow \boxed{AC = 10\sqrt{7}} \end{aligned}$$

$$\text{Triangle } ADB \rightarrow BD^2 = 30^2 + 20^2 - 2 \times 30 \times 20 \times \cos 120^\circ \rightarrow \boxed{BD = 10\sqrt{19}}$$

$$\begin{aligned} \text{Triangle } AOB \rightarrow AB^2 &= \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} \cdot \cos \alpha \\ 900 &= 25 \times 7 + 25 \times 19 + 2 \times 5\sqrt{7} \times 5\sqrt{19} \cos \alpha \rightarrow \boxed{\alpha = 115.69^\circ} \end{aligned}$$

$$\text{Aire du parallélogramme : } S = AD \cdot BC \sin D = 30 \times 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{300\sqrt{3}}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI184 – Mons – Juillet 2003

Démontrer que la relation suivante est vérifiée.

$$\frac{\cos 6a + 6 \cos 4a + 15 \cos 2a + 10}{\cos 5a + 5 \cos 3a + 10 \cos a} = 2 \cos a$$

La relation peut s'écrire :

$$\underbrace{\cos 6a + 6 \cos 4a + 15 \cos 2a + 10}_{M_1} = 2 \cos a (\cos 5a + 5 \cos 3a + 10 \cos a)$$

Traisons le premier membre qui peut s'écrire:

$$M_1 = \cos 6a + \cos 4a + 5 \cos 4a + 5 \cos 2a + 10 \cos 2a + 10$$

$$\text{Avec les formules : } \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\text{et : } 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

on obtient :

$$\begin{aligned} M_1 &= 2 \cos 5a \cos a + 10 \cos 3a \cos a + 10 \times 2 \times \cos^2 a \\ &= 2 \cos a (\cos 5a + 5 \cos 3a + 10 \cos a) \end{aligned}$$

C'est-à-dire le deuxième membre.

Le 19 septembre 2006

EXTRI185 – POLYTECH, Umons, Mons – Juillet 2003

Sachant que x , y et z sont des nombres réels compris entre 0 et $\pi/2$ et tels que

$$\tan x = \frac{1}{2}, \quad \tan y = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \tan z = \frac{1}{8}$$

Démontrer que $x + y + z = \pi/4$ sans utiliser la machine à calculer.

(seules les valeurs remarquables peuvent être considérées).

$$\tan(x + y + z) = \frac{\tan(x + y) + \tan z}{1 - \tan(x + y) \tan z}$$

$$\text{Or : } \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{7}{9}$$

$$\rightarrow \tan(x + y + z) = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8}} = 1 \rightarrow x + y + z = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{D'autre part : } \begin{cases} \tan x = \frac{1}{2} & \text{avec } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ \tan y = \frac{1}{5} & \text{avec } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < y < \frac{\pi}{4} \\ \tan z = \frac{1}{8} & \text{avec } 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < z < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow x + y + z = \frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{3\pi}{4} \rightarrow \text{La seule solution possible est } k = 0$$

$$\rightarrow \boxed{x + y + z = \frac{\pi}{4}}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI186 – Mons – Juillet 2003

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

L'équation s'écrit : $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\rightarrow \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

1er cas $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

2ème cas $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \pi + x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI187 – Mons – septembre 2003

Dans un triangle ABC , si m désigne la somme des côtés b et c , montrer que la relation suivante est vérifiée.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{m}{\sin B + \sin C}$$

En déduire la résolution du triangle connaissant le côté a , l'angle A et m , somme des côtés b et c . Donner la solution numérique pour $a = 12$ cm, $A = 46^\circ$ et $m = 24$ cm.

Rappel sur les proportions :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \rightarrow \frac{a}{c} + 1 = \frac{b}{d} + 1 \rightarrow \frac{a+c}{d} = \frac{b+d}{d} \rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

En partant de la relation des sinus, on obtient :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{m}{\sin B + \sin C} \text{ ce qui démontre la relation}$$

De plus, comme A, B et C sont supplémentaires :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{m}{\sin B + \sin(A+B)} = \frac{m}{2 \sin\left(\frac{A+2B}{2}\right) \cos\left(-\frac{A}{2}\right)} = \frac{m}{2 \sin\left(\frac{A+2B}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right)}$$

$$\text{En conclusion : } \sin\left(\frac{A+2B}{2}\right) = \frac{m \sin A}{2a \cos\left(\frac{A}{2}\right)}$$

Grâce à cette relation, on peut résoudre le triangle :

$$\sin\left(\frac{A+2B}{2}\right) = \frac{24 \sin 46^\circ}{2 \times 12 \times \cos\left(\frac{46}{2}\right)} = 0.781 \rightarrow \frac{A+2B}{2} = 51.4^\circ \rightarrow \begin{cases} B = 28,4^\circ \\ C = 105,6^\circ \end{cases}$$

$$\text{Et } \begin{cases} b = \frac{a}{\sin A} \sin B = 7.93 \text{ cm} \\ c = \frac{a}{\sin A} \sin C = 16.07 \text{ cm} \end{cases} \quad \text{on a bien } b+c = 24 \text{ cm}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI188 – Mons – septembre 2003

Démontrer que la relation suivante est vérifiée.

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = -1 - 4 \cos a \cos b \cos c$$

si a , b et c sont des angles supplémentaires.

Partons du membre de gauche :

$$\begin{aligned}\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c &= 2 \cos(a+b) \cos(a-b) + 2 \cos^2 c - 1 \\ &= -2 \cos c \cos(a-b) + 2 \cos^2 c - 1 \\ &= -2 \cos c (\cos(a-b) - \cos c) - 1 \\ &= -4 \cos c \cos a \cos b - 1\end{aligned}$$

C'est-à-dire le membre de droite.

Rappel :

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

Solution proposée par Frédéric Garcet

$$\begin{aligned}C &= 180^\circ - (A + B) \\ \cos C &= \cos(180^\circ - (A + B)) = -\cos(A + B) \\ \cos 2C &= \cos(360^\circ - 2(A + B)) = \cos(-2(A + B)) = \cos(2(A + B)) \\ \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C &= -1 - 4 \cos A \cos B \cos C \\ \underbrace{\cos 2A + \cos 2B}_{\text{Simpson}} + \underbrace{\cos(2(A + B))}_{\text{Carnot}} + 1 &= -4 \cos A \cos B (-\cos(A + B)) \\ 2 \cos(A + B) \cos(A - B) + 2 \cos^2(A + B) &= 4 \cos A \cos B \cos(A + B) \\ 2 \cos(A + B) [\cos(A - B) + \cos(A + B)] &= 4 \cos A \cos B \cos(A + B) \\ 2 \cos(A + B) \cdot 2 \cos A \cos(-B) &= 4 \cos A \cos B \cos(A + B) \\ 4 \cos A \cos B \cos(A + B) &= 4 \cos A \cos B \cos(A + B) \rightarrow OK\end{aligned}$$

Le 19 septembre 2006. Modifié le 2 juillet 08

EXTRI189 – Mons – septembre 2003

Démontrer que la relation suivante est vérifiée.

$$\frac{\sin a + 2 \sin 2a + \sin 3a}{\sin 3a + 2 \sin 4a + \sin 5a} = \frac{1}{2 \cos 2a}$$

la relation peut s'écrire :

$$2 \cos 2a (\sin a + 2 \sin 2a + \sin 3a) = \sin 3a + 2 \sin 4a + \sin 5a$$

Compte tenu que

$$\sin a + \sin 3a = 2 \sin 2a \cos a$$

$$\sin 3a + \sin 5a = 2 \sin 4a \cos a$$

$$\rightarrow 2 \cos 2a (2 \sin 2a \cos a + 2 \sin 2a) = 2 \sin 4a \cos a + 2 \sin 4a$$

$$\rightarrow 4 \sin 2a \cos 2a (\cos a + 1) = 2 \sin 4a (\cos a + 1)$$

$$\rightarrow 2 \sin 4a (\cos a + 1) = 2 \sin 4a (\cos a + 1)$$

Le 19 septembre 2006