Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 19

EXTRI190-EXTRI199

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXTRI190 – Mons – septembre 2003

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos^2 x+\sin^2 x+\tan^2 x=\frac{5}{6}$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$CE: x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

L'équation peut s'écrire :

$$\cos 2x+\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=\frac{5}{6}\rightarrow\cos 2x\left(1+\cos 2x\right)+1-\cos 2x=\frac{5}{6}\left(1+\cos 2x\right)$$

$$\cancel{\cos 2x}+\cos^2 2x+1-\cancel{\cos 2x}=\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cos 2x$$

$$\cos^2 2x-\frac{5}{6}\cos 2x+\frac{1}{6}=0\rightarrow 6\cos^2 2x-5\cos 2x+1=0$$

$$\rightarrow\cos 2x=\frac{5\pm\sqrt{25-4\times 6\times 1}}{12}=\frac{5\pm 1}{12}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\cos 2x=\frac{1}{2}\rightarrow 2x=\pm 60°+k360° & \rightarrow\boxed{x=\pm 30°+k180°}\\ \cos 2x=\frac{1}{3}\rightarrow 2x=\pm 70,52°+k360° & \rightarrow\boxed{x=\pm 35.26°+k180}\end{cases}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI191 – Mons – juillet 2004

Résoudre le triangle ABC connaissant son périmètre (p) ainsi que ses angles A et B. Donner la solution numérique pour p = 58 cm , A = 37° et B = 80°

Rappel sur les proportions :

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\rightarrow\frac{a}{c}+1=\frac{b}{d}+1\rightarrow\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}\rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$$

Appliquons à la formule des sinus :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{p}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

Or $\sin C=\sin\left(A+B\right)$ car ce sont des angles supplémentaires

$$\rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{p}{\sin A+\sin B+\sin\left(A+B\right)}\sin A \\ b=\dfrac{p}{\sin A+\sin B+\sin\left(A+B\right)}\sin B \\ c=\dfrac{p}{\sin A+\sin B+\sin\left(A+B\right)}\sin\left(A+B\right) \end{cases}$$

Dans notre cas particulier : $\dfrac{58}{\sin 37+\sin 80+\sin\left(37+80\right)}=23.409$

$$\rightarrow\begin{cases} a=23.409\times\sin 37 = \boxed{14.09\ cm} \\ b=23.409\times\sin 80 = \boxed{23.05\ cm} \\ c=23.409\times\sin\left(37+80\right)=\boxed{20.86\ cm} \end{cases}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI192 – FPMS, UMONS, Mons – juillet 2004

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$$

$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$

Par Simpson $\rightarrow 2\sin x \cos 4x = 2\cos 4x \cos 2x$

1) $\cos 4x = 0$

$$\cos 4x = 0 \rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}}$$

2) $\sin x = \cos 2x$

$$\sin x - \cos 2x = 0 \rightarrow \sin x - 1 + 2\sin^2 x = 0$$

$$\rightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

- $\sin x = -1 \rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

- $\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

Le 19 septembre 2006. Modifié le 26 juin 2012.

EXTRI193 – Mons – juillet 2004

Si A,B et C désignent les angles internes d'un triangle et b et c, les côtés opposés aux angles du même nom, démontrer que la relation suivante est vérifiée :

$$b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 2bc \sin A$$

On a : $\sin A = \sin(B+C)$ car angles supplémentaires

$\rightarrow$ Le membre de gauche de la relation peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{b}{c}\sin 2C + \frac{c}{b}\sin 2B &= \frac{\sin B}{\sin C}\sin 2C + \frac{\sin C}{\sin B}\sin 2B \\
&= \frac{\sin B}{\sin C}.2\sin C\cos C + \frac{\sin C}{\sin B}.2\sin B\cos B \\
&= 2\sin B\cos C + 2\sin C\cos B \\
&= 2\sin(B+C) = 2\sin A
\end{aligned}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI194 – Mons – juillet 2004

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x - \sqrt{2} = 0$$

Posons $\tan\varphi = \sqrt{3} \rightarrow \varphi = 60°$

L'équation devient :

$\sin x + \tan\varphi\cos x = \sqrt{2} \rightarrow \cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x = \cos 60 \times \sqrt{2}$

$$\sin(\varphi + x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

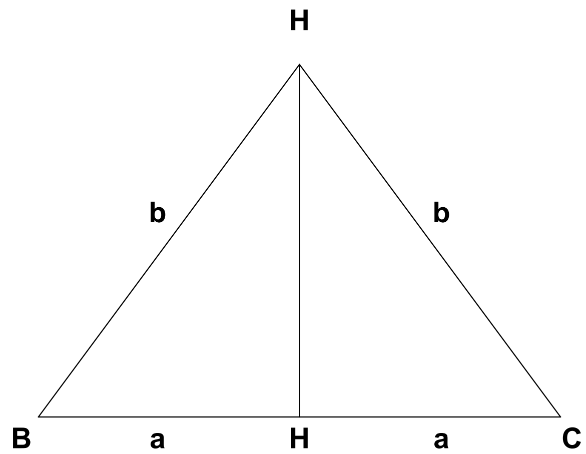
$$\rightarrow \begin{cases} 60 + x = 45 + k360 \rightarrow \boxed{x = -15° + k360°} \\ 60 + x = 135 + k360 \rightarrow \boxed{x = 75 + k360°} \end{cases}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI195 – Mons – septembre 2004

Résoudre le triangle ABC sachant que les angles B et C sont égaux, que le périmètre vaut 24 m et que la hauteur AH est de 4.9 m

---



Le triangle ABC est isocèle et H est est milieu de BC

On a : $2a + 2b = 24 \rightarrow a + b = 12$

Par Pythagore dans le triangle AHC : $b^2 = AH^2 + a^2$

$\rightarrow (12 - a)^2 = 4.9^2 + a^2 \rightarrow 144 - 24a + a^2 = 4.9^2 + a^2 \rightarrow \boxed{a = 5m}$

Donc $\boxed{b = 7\ m}$

Et $\cos B = \cos C = \dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{7} \rightarrow \boxed{B = C = 44.4°} \rightarrow \boxed{A = 91.2°}$

Le 19 septembre 2006

EXTRI196 – Mons – septembre 2004

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos x - \sin x = \sin 3x - \cos 3x$$

Et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

$$\cos x - \sin x = \sin 3x - \cos 3x \to \cos 3x - \cos x = \sin 3x + \sin x$$
$$\to 2\cos 2x \cos x = 2\sin 2x \cos x$$

$\underline{1)\ \cos x = 0}$

$$\cos x = 0 \to \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$$

$\underline{2)\ \cos 2x = \sin 2x}$

$$\cos 2x = \sin 2x \to \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$
$$\to 2x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \to \boxed{x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI197 – Mons – septembre 2004

Vérifier l'identité suivante :

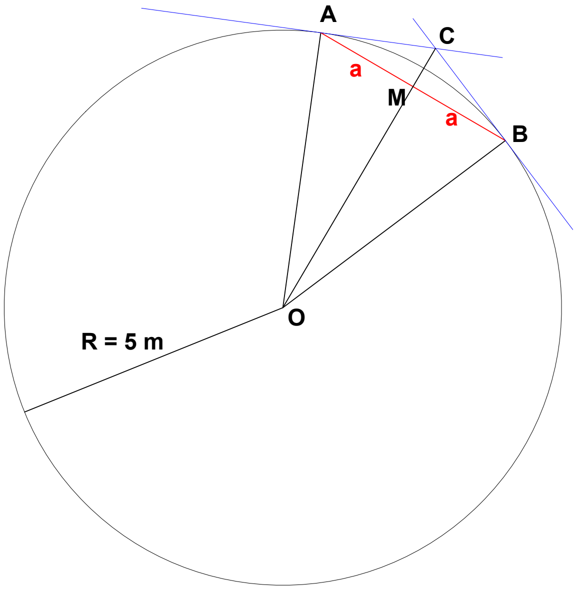
$$16\cos^3 x \sin^2 x = 2\cos x - \cos 3x - \cos 5x$$

$$\begin{aligned} 2\cos x - \cos 3x - \cos 5x &= \cos x - \cos 3x + \cos x - \cos 5x \\ &= -2\sin 2x \sin(-x) - 2\sin 3x \sin(-2x) \\ &= 2\sin 2x \sin x + 2\sin 3x \sin 2x \\ &= 2\sin 2x(\sin x + \sin 3x) \\ &= 2\sin 2x.2\sin 2x \cos(-x) \\ &= 4\sin^2 2x \cos x \\ &= 4\times 4\sin^2 x\cos^2 x \cos x \\ &= 16\sin^2 x \cos^3 x \end{aligned}$$

Le 19 septembre 2006

EXTRI198 – Mons – septembre 2004

Dans un cercle de rayon R = 5 cm, on mène une corde $AB = 2a = 4$ m et les tangentes (au cercle) aux points A et B qui se coupent C. Calculer les angles et l'aire du triangle ABC



Les triangles AOM et BOM sont rectangles

$$\rightarrow \sin AOM = \sin BOM = \frac{a}{R} = \frac{2}{5} = 0.4 \rightarrow O = 23.58°$$

Donc : $\boxed{BAC = ABC = 23.58°} \rightarrow ACB = 180 - (BAC + ABC) = \boxed{132.34°}$

Aire du triangle $ABC : S = \frac{AB.CM}{2} = \frac{AB.a.\tan BC}{2} = \frac{4 \times 2 \times \tan 23.58}{2} = \boxed{1.746\ cm^2}$

Le 19 septembre 2006

EXTRI199 – Mons – juillet 2006

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$4\sin^2 2x = 1 + 4\sin^2 x$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

L'équation peut s'écrire :

$$4\sin^2 2x = 1 + 4\sin^2 x \rightarrow 16\sin^2 x.\cos^2 x = 1 + 4\sin^2 x \rightarrow 16\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right) = 1 + 4\sin^2 x$$

$$16\sin^4 x - 12\sin^2 x + 1 \rightarrow \sin^2 x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}$$

1) $\sin^2 x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{8} \simeq 0.0955$

- $\sin x = 0.309 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} + 2k\pi \\ x = \dfrac{9\pi}{10} + 2k\pi \end{cases}$
- $\sin x = -0.309 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{11\pi}{10} + 2k\pi \\ x = \dfrac{19\pi}{10} + 2k\pi \end{cases}$

2) $\sin^2 x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{8} \simeq 0.655$

- $\sin x = 0.809 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{10} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{10} + 2k\pi \end{cases}$
- $\sin x = -0.809 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13\pi}{10} + 2k\pi \\ x = \dfrac{17\pi}{10} + 2k\pi \end{cases}$

Le 19 septembre 2006