

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 2

EXTRI020 – EXTRI029

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

1 avril 03

EXTRI020 – Liège, septembre 2000.

Résoudre le système d'équation suivant :

$$\cos^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta = \cos^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\alpha \cos^2\beta$$

$$\cos^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta = \cos^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\alpha \cos^2\beta$$

$$\begin{cases} \cos^2\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta = \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta + \sin^2\alpha \cos^2\beta = \cos^2\alpha \end{cases}$$

$$\rightarrow \cos^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\alpha (\sin^2\beta - \cos^2\beta) = 0$$

$$(\cos^2\beta - \sin^2\beta)(1 - \sin^2\alpha) = 0$$

$$1) \quad 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos^2\beta + \sin^2\beta = 0 \\ \sin^2\beta + \cos^2\beta = 0 \end{cases} \quad \text{impossible}$$

Il reste:

$$\cos^2\beta = \sin^2\beta \rightarrow \tan^2\beta = 1 \rightarrow \beta = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\rightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} + \sin^2\alpha \cdot \frac{1}{2} = \cos^2\alpha$$

$$1 + \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha = 2 - 2\sin^2\alpha$$

$$3\sin^2\alpha = 1 \rightarrow \sin\alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha = 0.6155 + 2k\pi \\ \alpha = \pi - 0.6155 + 2k\pi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha = -0.6155 + 2k\pi \\ \alpha = \pi + 0.6155 + 2k\pi \end{cases}$$

EXTRI021 – Liège, juillet 1996.

Résoudre et représenter

$$\cos 2x = \sqrt{2} (\sin^3 x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x)$$

$$\cos 2x = \sqrt{2} (\sin^3 x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x)$$

$$\frac{\cos 2x}{\cos^3 x} = \sqrt{2} (\tan^3 x + 1 - \tan^2 x - \tan x)$$

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^3 x} = \sqrt{2} (\tan^2 x (\tan x - 1) - (\tan x - 1))$$

$$\frac{1 - \tan^2 x}{\cos x} = \sqrt{2} (\tan x - 1)(\tan^2 x - 1)$$

$$1) \quad 1 - \tan^2 x = 0 \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Il reste :

$$-\frac{1}{\cos x} = \sqrt{2} (\tan x - 1) = \sqrt{2} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x}$$

$$\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x = -1 \rightarrow \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \varphi = -1 \rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2) \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$$

EXTRI022 – Liège, septembre 2000.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\tan(x+a) + \tan(x-a) = \cot x$$

$$\tan(x+a) + \tan(x-a) = \cot x$$

$$CE: \quad x+a \neq \pm \frac{\pi}{2} \quad x-a \neq \pm \frac{\pi}{2} \quad x \neq k\pi$$

$$\frac{\sin(x+a+x-a)}{\cos(x+a)\cos(x-a)} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin x \sin 2x = \cos x \cos(x+a) \cos(x-a)$$

$$2 \sin^2 x \cos x = \cos x \cos(x+a) \cos(x-a)$$

$$1) \quad \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi \quad \text{A rejeter.}$$

Il reste :

$$2 \sin^2 x = \cos(x+a) \cos(x-a) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 2a$$

$$= \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 a - 1) = -\sin^2 x + \cos^2 a$$

$$3 \sin^2 x = \cos^2 a \rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos a$$

Etudions les CE.

$$\text{Si } x+a = \frac{\pi}{2} \rightarrow a = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin x$$

$$\rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \rightarrow a = \frac{\pi}{2} - k\pi$$

Les autres CE donnent le même résultat.

Conclusion :

$$\text{Si } a = \frac{\pi}{2} - k\pi \quad \text{Equation impossible}$$

$$\text{Dans les autres cas : } \begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cos a\right) \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cos a\right) \end{cases}$$

Solution proposée par Anthony Bertagno

$$\tan(x+a) + \tan(x-a) = \cot x$$

$$CE: \quad x+a \neq \pm \frac{\pi}{2} \quad x-a \neq \pm \frac{\pi}{2} \quad x \neq k\pi$$

L'équation devient

$$\frac{\tan x + \tan a}{1 - \tan x \tan a} + \frac{\tan x - \tan a}{1 + \tan x \tan a} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\frac{(\tan x + \tan a)(1 + \tan x \tan a) + (\tan x - \tan a)(1 - \tan x \tan a)}{(1 - \tan x \tan a)(1 + \tan x \tan a)} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\frac{\tan x + \cancel{\tan^2 x \tan a} + \cancel{\tan a} + \tan x \tan^2 a + \tan x - \cancel{\tan^2 x \tan a} - \cancel{\tan a} + \tan x \tan^2 a}{1 - \tan^2 x \tan^2 a} = \frac{1}{\tan a}$$

$$\frac{2 \tan x + 2 \tan x \tan^2 a}{1 - \tan^2 x \tan^2 a} - \frac{1}{\tan x} = 0$$

$$\frac{(2 \tan x + 2 \tan x \tan^2 a) \tan x - (1 - \tan^2 x \tan^2 a)}{(1 - \tan^2 x \tan^2 a) \tan x} = 0$$

$$2 \tan^2 x + 2 \tan^2 x \tan^2 a - 1 + \tan^2 x \tan^2 a = 0$$

$$(3 \tan^2 a + 2) \tan^2 x - 1 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\tan x = \pm \sqrt{\frac{1}{3 \tan^2 a + 2}}}$$

En prenant quelques valeurs pour a , on peut vérifier facilement que cette solution est équivalente à la précédente.

EXTRI023 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin a + \sin (a + x) + \sin (a + 2x) + \sin (a + 3x) = 0$$

sachant que $\sin a$ n'est pas nul.

Représenter sur le cercle trigonométrique dans le cas où a vaut 60°

$$\sin a + \sin (a + x) + \sin (a + 2x) + \sin (a + 3x) = 0$$

$$2 \sin \frac{a+a+3x}{2} \cos \frac{a-a-3x}{2} + 2 \sin \frac{a+x+a+2x}{2} \cos \frac{a+x-a-2x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{2a+3x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{2a+3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{2a+3x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$1) \quad \sin \frac{2a+3x}{2} = 0 \rightarrow \frac{2a+3x}{2} = k180 \rightarrow x = -\frac{2a}{3} + k120$$

Il reste :

$$\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \cos \frac{3x}{2} = -\cos \frac{x}{2} = \cos \left(180 - \frac{x}{2} \right)$$

$$2) \quad a) \quad \frac{3}{2}x = 180 - \frac{x}{2} + 2k180 \rightarrow x = 90 + k180$$

$$b) \quad \frac{3}{2}x = -180 + \frac{x}{2} + 2k180 \rightarrow x = (-)180 + k360$$

Si $a = 60^\circ$,

$$x = -40 + k120 \quad \text{ou} \quad x = 90 + k180 \quad \text{ou} \quad x = 180 + k360$$

Le lecteur représentera facilement les solutions sur le cercle.

EXTRI024 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre et représenter l'équation trigonométrique suivante :

$$\tan x (1 + \cos 2a) = \cos 2a \tan 2x$$

où a désigne un angle connu..

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique si $a = 60^\circ$

$$\tan x (1 + \cos 2a) = \cos 2a \tan 2x$$

$$CE : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$$

$$\tan x (1 + \cos 2a) = \cos 2a \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$1) \tan x = 0 \rightarrow x = k\pi$$

Il reste :

$$1 + \cos 2a = \frac{2 \cos 2a}{1 - \tan^2 x}$$

$$\tan^2 x = 1 - \frac{2 \cos 2a}{1 + \cos 2a} = \frac{1 + \cos 2a - 2 \cos 2a}{1 + \cos 2a} = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} = \tan^2 a$$

$$2) \tan x = \pm \tan a$$

$$x = \pm a + k\pi$$

$$\text{si } a = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$$

EXTRI025 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre et représenter l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin 2x = m \sin^3 x$$

où m désigne un paramètre réel.

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique si où $m = 4/3$.

$$\sin 2x = m \sin^3 x$$

$$2 \sin x \cos x = m \sin^3 x$$

$$1) \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$$

Il reste :

$$2 \cos x = m \sin^2 x = m(1 - \cos^2 x) \rightarrow m \cos^2 x + 2 \cos x - m = 0$$

$$A) \text{ si } m = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = k \frac{\pi}{2}$$

B) si $m \neq 0$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+m^2}}{m} \quad \text{Il faut vérifier : } -1 \leq \frac{-1 \pm \sqrt{1+m^2}}{m} \leq 1$$

B 1) $m > 0$

$$B 1 1) -1 \leq \frac{-1 + \sqrt{1+m^2}}{m}$$

$$-(m+1) \leq \sqrt{1+m^2} \quad \text{Toujours vérifié.}$$

$$B 1 2) \frac{-1 + \sqrt{1+m^2}}{m} \leq 1$$

$$\sqrt{1+m^2} \leq (m+1) \quad \text{Toujours vérifié}$$

$$B 1 3) -1 \leq \frac{-1 - \sqrt{1+m^2}}{m}$$

$$m-1 \geq \sqrt{1+m^2} \rightarrow m^2 - 2m + 1 \geq 1 + m^2$$

$$-2m \geq 0 \quad \text{Impossible}$$

$$B 1 4) \frac{-1 - \sqrt{1+m^2}}{m} \leq 1$$

$$-\sqrt{1+m^2} \leq m+1 \quad \text{Toujours vérifié.}$$

$$\Rightarrow \text{ conclusion : } \cos x = \frac{-1 + \sqrt{1+m^2}}{m}$$

B 2) $m < 0$

$$B 2 1) \quad -1 \leq \frac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}$$

$$1 - m \geq \sqrt{1 + m^2} \quad \text{Toujours vérifié.}$$

$$B 2 2) \quad \frac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m} \leq 1$$

$$\sqrt{1 + m^2} \geq (m + 1) \quad \text{Toujours vérifié}$$

$$B 2 3) \quad -1 \leq \frac{-1 - \sqrt{1 + m^2}}{m}$$

$$m - 1 \geq \sqrt{1 + m^2} \quad \text{Impossible}$$

$$B 2 4) \quad \frac{-1 - \sqrt{1 + m^2}}{m} \leq 1$$

$$\sqrt{1 + m^2} \leq -m - 1$$

$$1 + m^2 \leq m^2 + 2m + 1$$

$$0 \leq m \quad \text{Impossible}$$

$$\Rightarrow \text{conclusion : } \cos x = \frac{-1 + \sqrt{1 + m^2}}{m}$$

$$\text{Si } m = \frac{4}{3} \rightarrow \cos x = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{16}{9}}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

EXTRI026 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre et représenter l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$$

$$2 \cos \frac{5x+3x}{2} \sin \frac{5x-3x}{2} = 2 \cos \frac{6x+2x}{2} \cos \frac{6x-2x}{2}$$

$$\cos 4x \sin x = \cos 4x \cos 2x$$

$$1) \cos 4x = 0 \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2}$$

Il reste :

$$\sin x = \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$2) \sin x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$3) \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

EXTRI027 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin x + \cos \frac{2x}{3} = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{6} \right)$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\sin x + \cos \frac{2x}{3} = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{6} \right)$$

$$\text{Soit } \frac{x}{6} = y \rightarrow \sin 6y + \cos 4y = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + y \right) = 1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + 2y \right)$$

$$\sin 6y + 1 - 2 \sin^2 2y = 1 + \sin 2y$$

$$\sin 6y - \sin 2y = 2 \sin^2 2y$$

$$2 \cos 4y \sin 2y = 2 \sin^2 2y$$

$$1) \quad \sin 2y = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \pi + 2k\pi \\ \frac{x}{3} = 2k\pi \end{cases} \rightarrow x = 3k\pi$$

Il reste :

$$\cos 4y = \sin 2y = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2y \right)$$

$$2) \quad \begin{cases} 4y = \frac{\pi}{2} - 2y + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 4y = -\frac{\pi}{2} + 2y + 2k\pi \rightarrow x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

EXTRI028 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$4 \sin x \sin 3x - 2 \cos 2x + 1 = 0$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$4 \sin x \sin 3x - 2 \cos 2x + 1 = 0$$

Rappel : $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, donc

$$4 \sin x (3 \sin x - 4 \sin^3 x) - 2(1 - 2 \sin^2 x) + 1 = 0$$

$$16 \sin^4 x - 16 \sin^2 x + 1 = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16}}{16} \rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0.9330 \\ \sin^2 x = 0.0670 \end{cases}$$

$$1) \sin^2 x = 0.9330 \rightarrow \sin x = \pm 0.9659$$

$$\begin{cases} x = -75 + 2k180 \\ x = 255 + 2k180 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 75 + 2k180 \\ x = 105 + 2k180 \end{cases}$$

$$2) \sin^2 x = 0.0670 \rightarrow \sin x = \pm 0.2588$$

$$\begin{cases} x = -15 + 2k180 \\ x = 195 + 2k180 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 15 + 2k180 \\ x = 165 + 2k180 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \pm 15 + k90$$

EXTRI029 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\tan x + \tan 3x + \sin 2x = 0$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\tan x + \tan 3x + \sin 2x = 0$$

$$CE : x \neq \pm \frac{\pi}{2} \quad x \neq \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\sin(x+3x)}{\cos x \cos 3x} = -\sin 2x \rightarrow \sin 4x = -\sin 2x \cos x \cos 3x$$

$$2 \sin 2x \cos 2x = -\sin 2x \cos x \cos 3x$$

$$\rightarrow \sin 2x = 0 \rightarrow \text{A rejeter car CE}$$

Il reste :

$$2 \cos 2x = -\cos x \cos 3x = -\frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$5 \cos 2x = -\cos x = -2 \cos^2 2x + 1$$

$$2 \cos^2 2x + 5 \cos 2x - 1 = 0$$

$$\cos 2x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+8}}{4} = \frac{-5 \pm 5.7446}{4}$$

$$\rightarrow 2x = \pm 1,3835 + 2k\pi \rightarrow x = \pm 0,69185 + k\pi$$