Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 22

EXTRI220-EXTRI229

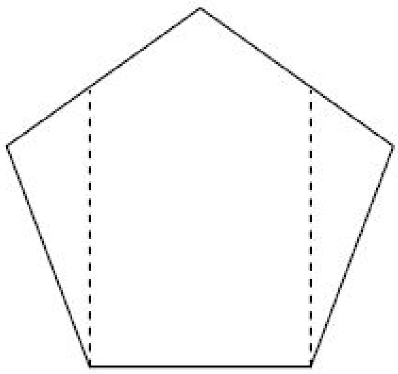
http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

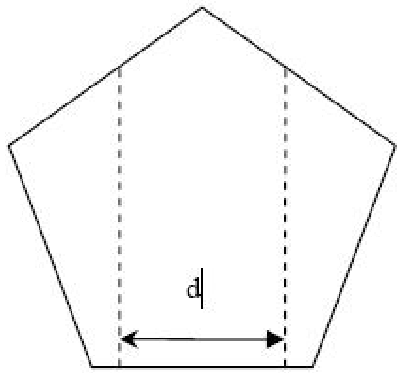
Juillet 08

EXTRI220 – EPL, UCL, LLN, septembre 2006

Un parterre de fleurs a la forme d'un pentagone régulier dont le côté a une longueur de 2 mètres. On décide de mettre des fleurs en forme de drapeau tricolore dans ce pentagone. Deux solutions sont considérées :



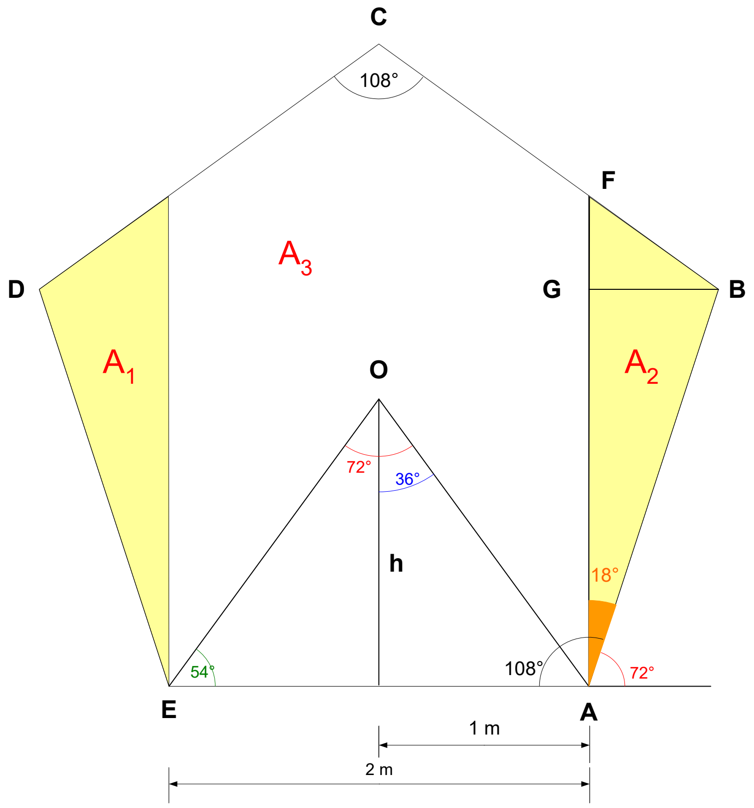
Solution 1



Solution 2

1. La première solution : tracer deux verticales à partir des extrémités du côté inférieur. Quelles sont les aires des trois parties de ce parterre (en m^2et à deux décimales près)?
2. La deuxième solution : tracer deux verticales de façon symétrique par rapport au centre et de façon à avoir trois parties de surface égale. Quelle est la distance d entre ces deux verticales $($en m et à deux décimales près$)$?
3. Indiquez sur un croquis les angles et distances intermédiaires que vous calculez.

Solution proposée par Michel GOFFIN



1) Les angles principaux sont indiqués sur la figure.

Calculons l'aire de A_1 et A_2 : $A_1 = A_2 = \dfrac{FA \times GB}{2}$

Or $\begin{cases} GB = AB\sin 18° \\ \dfrac{FA}{\sin 108°} = \dfrac{AB}{\sin 54°} \Rightarrow FA = AB\dfrac{\sin 108°}{\sin 54°} \end{cases}$

Donc : $A_1 = A_2 = \dfrac{1}{2}AB^2\dfrac{\sin 18° \times \sin 108°}{\sin 54°}$

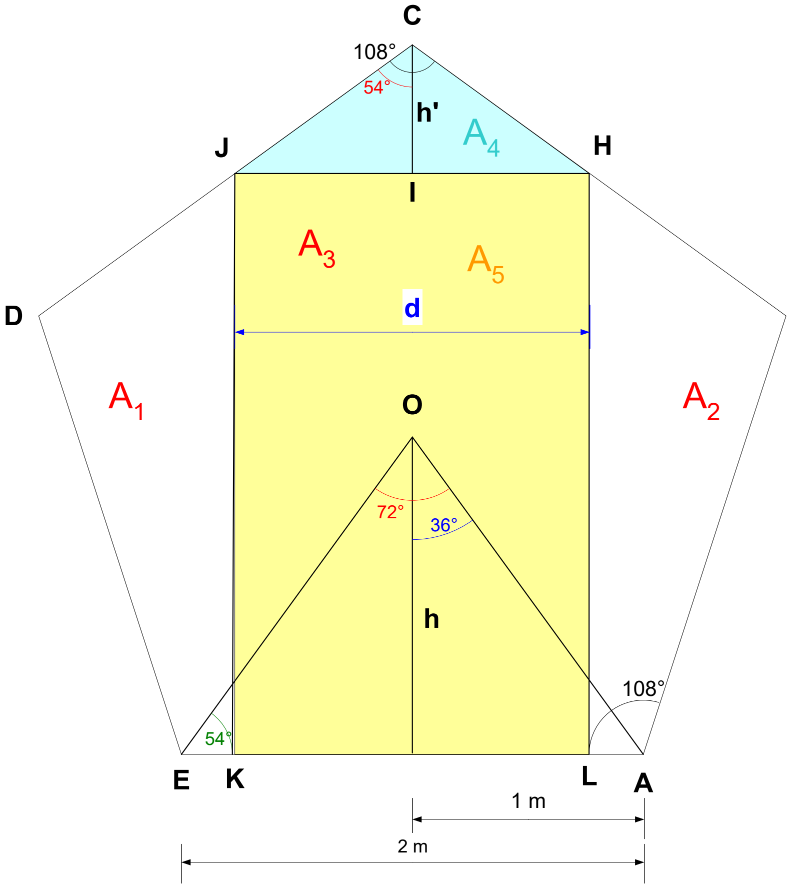
Sachant que $\begin{cases} 108° = 90 + 18° \\ 54° = 90° - 36 \end{cases}$, on peut dire que

$A_1 = A_2 = \dfrac{1}{2}AB^2\dfrac{\sin 18° \times \cos 18°}{\cos 36°} = \dfrac{1}{4}AB^2\tan 36° = \boxed{0.7265 \text{ m}^2}$

D'autre part, nous avons : $h = 1 \times \tan 54°$

Aire du pentagone : $A = \dfrac{5 \times h \times c}{2} = 5\tan 54° = 6.8819 \text{ m}^2$

Et donc $A_3 = A - 2A_1 = 6.8819 - 2 \times 0.7265 = \boxed{5.4289\ m^2}$



2) Les surfaces deviennent $A_1 = A_2 = A_3 = \dfrac{A}{3} = \dfrac{6.90}{3} = 2.30\ m^2$

Calculons A_3 en fonction de d. Nous avons $A_3 = A_4 + A_5$

$IA = h' = \dfrac{d}{2\tan 54°} = 0.36\ d \rightarrow A_4 = \dfrac{h' \times JH}{2} = 0.18\ d^2$

A_5 est un simple rectangle.

La hauteur KJ de ce rectangle est $KJ = R + h\ - h'$ où R est le rayon du cercle circonscrit au pentagone : $R = \dfrac{EA}{2\cos 54°} = \dfrac{2}{2\cos 54°} = 1.70\ m$

$\rightarrow KJ = 1.70 + 1.38 - 0.36d = 3.08 - 0.36d$

$\rightarrow A_5 = KL \times JK = d \times (3.08 - 0.36d)$

Finalement, $A_3 = A_4 + A_5 = 3.08d - 0.36d^2 + 0.18\ d^2 = 3.08d - 0.18d^2$

Il nous reste à résoudre d'équation suivante :

$2.30 = 3.08d - 0.18d^2 \rightarrow 0.18d^2 - 3.08d + 2.30 = 0$

$\rightarrow \begin{cases} d = 0.78\ m \\ d = 16.33 \quad \text{à rejeter} \end{cases} \rightarrow \boxed{d = 0.78\ m}$

Le 17 avril 2007. Modifié le 1 septembre 2014 (Michel GOFFIN)

EXTRI221 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2007

Démontrer l'identité :

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2x\right)$$

$$\begin{aligned}\sin^4 x+\cos^4 x &= \sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x\\ &=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\\ &=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2}\left(2-\sin^2 2x\right)=\frac{1}{2}\left(2-1+\cos^2 2x\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2x\right)\end{aligned}$$

Le 3 juillet 07. Relu par Benoit Baudelet.

EXTRI222 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2007

Montrer que si $a,\ b,\ c$ sont des nombres positifs vérifiant,

$$a>b \text{ et } c^2=a^2-b^2$$

Alors l'expression

$$\sqrt{\left(a\cos\phi+c\right)^2+b^2\sin^2\phi}+\sqrt{\left(a\cos\phi-c\right)^2+b^2\sin^2\phi}$$

a une valeur indépendante de ϕ. Trouver cette valeur.

$$E=\sqrt{\underbrace{\left(a\cos\phi+c\right)^2+b^2\sin^2\phi}_{E_1}}+\sqrt{\underbrace{\left(a\cos\phi-c\right)^2+b^2\sin^2\phi}_{E_2}}$$

Comme tous les termes en dessous des racines sont des carrés, il n'y a pas de condition d'existence.

Traitons E_1 et E_2 séparément.

$$\begin{aligned}E_1&=\left(a\cos\phi+c\right)^2+b^2\sin^2\phi=a^2\cos^2\phi+2ac\cos\phi+c^2+\left(a^2-c^2\right)\sin^2\phi\\ &=a^2\left(\cos^2\phi+\sin^2\phi\right)+2ac\cos\phi+c^2\left(1-\sin^2\phi\right)\\ &=a^2+2ac\cos\phi+c^2\cos^2\phi=\left(a+c\cos\phi\right)^2\end{aligned}$$

$$\to\sqrt{E_1}=\left|\,a+c\cos\phi\,\right|=a+c\cos\phi$$

Car en vertu des hypothèses $a>c$ et $-1\le\cos\phi\le+1$

$$\begin{aligned}E_2&=\left(a\cos\phi-c\right)^2+b^2\sin^2\phi=a^2\cos^2\phi-2ac\cos\phi+c^2+\left(a^2-c^2\right)\sin^2\phi\\ &=a^2\left(\cos^2\phi+\sin^2\phi\right)-2ac\cos\phi+c^2\left(1-\sin^2\phi\right)\\ &=a^2-2ac\cos\phi+c^2\cos^2\phi=\left(a-c\cos\phi\right)^2\end{aligned}$$

$$\to\sqrt{E_2}=\left|\,a-c\cos\phi\,\right|=a-\cos\phi$$

Car en vertu des hypothèses $a>c$ et $-1\le\cos\phi\le+1$

$$\to E=\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}=a+c\cos\phi+a-c\cos\phi=\boxed{2a}$$

Le 3 juillet 07. Relu par Benoit Baudelet

EXTRI223 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2007

Résoudre l'équation

$$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Utilisons Simpson

$\sin 5x - \sin 3x = \cos 6x + \cos 2x$

$2\cos 4x \sin x = 2\cos 4x \cos 2x$

1) $\underline{\cos 4x = 0}$

$$\cos 4x = 0 \rightarrow 4x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = \pm\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

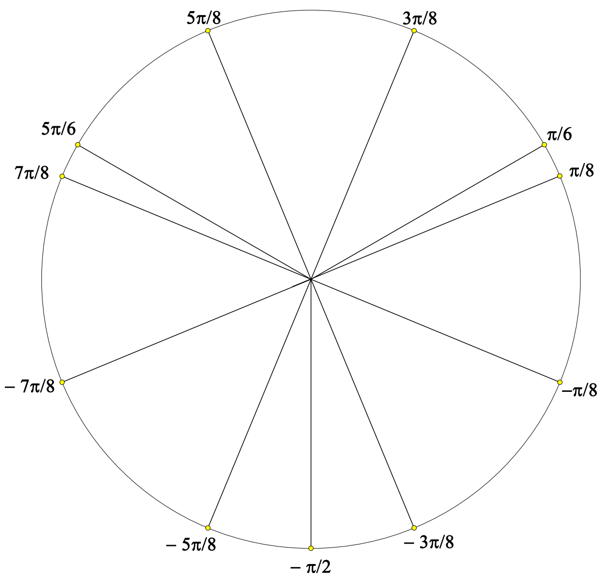
2) $\underline{\sin x = \cos 2x}$

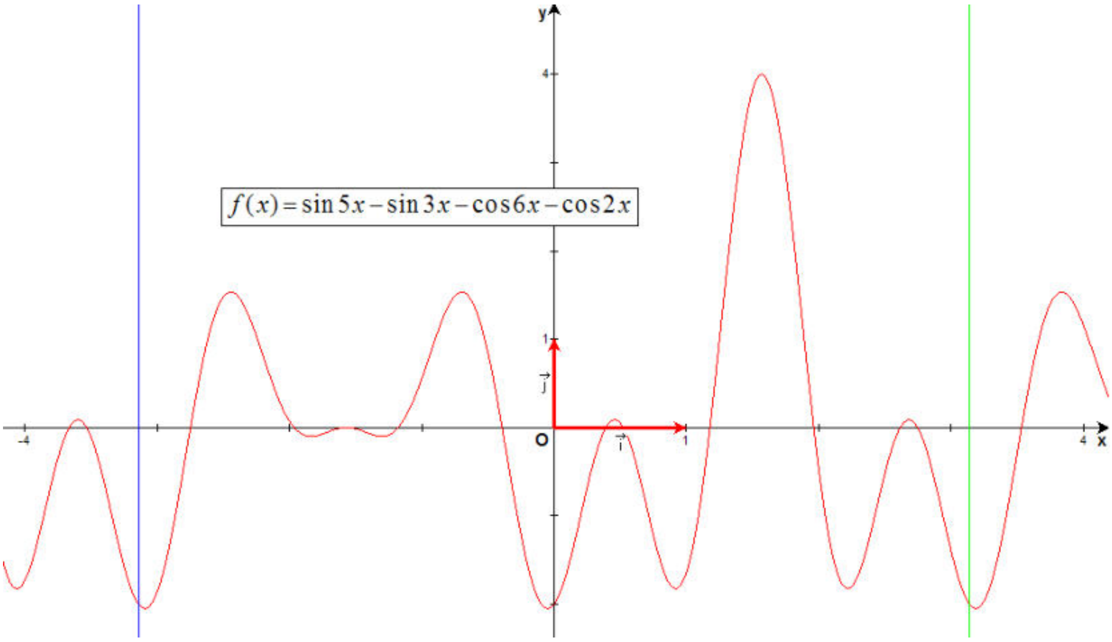
$$\sin x = \cos 2x \rightarrow \sin x = 1 - 2\sin^2 x \rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\rightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

Pour $x \in [-\pi, \pi]$, les solutions sont

$$\boxed{S : \left\{-\frac{7\pi}{8}, -\frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8}\right\}}$$





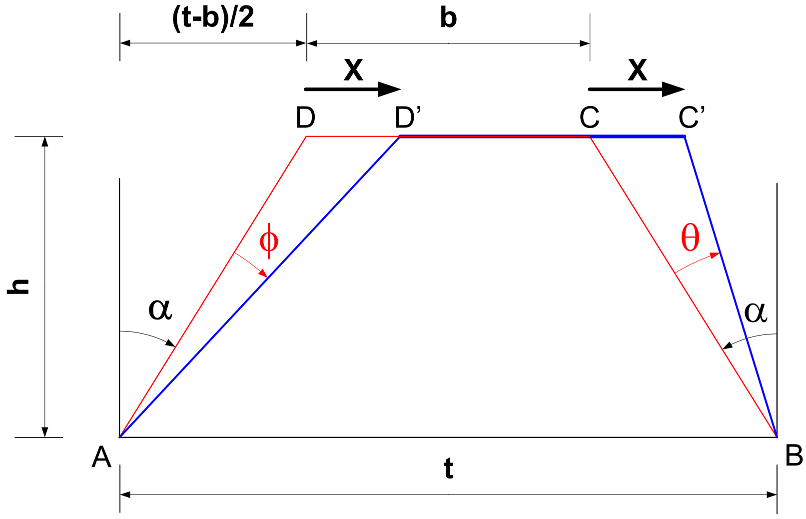
Le 3 juillet 07

EXTRI224 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2007

Soit le trapèze isocèle représenté à la figure 1. La grande base à une longueur t, la hauteur vaut h, l'angle entre ses côtés obliques et la verticale vaut α et la petite base à une longueur notée b.

On déplace le sommet C vers la droite d'une distance x, de telle sorte que le côté BC est incliné d'un angle θ par rapport à BC. On considère le trapèze $ABC'D'$ tel que $C'D' = CD = b$. Le côté AD' est alors incliné d'un angle ϕ par rapport à AD.

- Montrer qu'il existe un angle α tel que : $\cot\phi - \cot\theta = 2$
- Déterminer la valeur numérique de cet angle α si $t = 2$ m et $h = 0.5$ m



Pour simplifier, posons : $c=\dfrac{t-b}{2}$

Nous avons immédiatement les relations suivantes.

$$(1)\quad \cot\alpha=\frac{h}{c}\qquad (2)\quad \cot(\alpha+\phi)=\frac{h}{c+x}\qquad (3)\quad \cot(\alpha-\theta)=\frac{h}{c-x}$$

Traitons la relation (2) et la relation (3) en tenant compte de (1)

$$(2)\rightarrow \cot(\alpha+\phi)=\frac{\cot\alpha\cot\phi-1}{\cot\alpha+\cot\phi}=\frac{\frac{h}{c}\cot\phi-1}{\frac{h}{c}+\cot\phi}=\frac{h}{c+x}$$

$$\rightarrow \frac{h\cot\phi-c}{h+c\cot\phi}=\frac{h}{c+x}\rightarrow h(c+x)\cot\phi-c(c+x)=h^2+ch\cot\phi$$

$$\rightarrow hx\cot\phi=h^2+c(c+x)\qquad\qquad (4)$$

$$(3)\rightarrow \cot(\alpha-\theta)=\frac{\cot\alpha\cot\theta+1}{-\cot\alpha+\cot\theta}=\frac{\frac{h}{c}\cot\theta+1}{-\frac{h}{c}+\cot\theta}=\frac{h}{c-x}$$

$$\rightarrow \frac{h\cot\theta+c}{-h+c\cot\theta}=\frac{h}{c-x}\rightarrow h(c-x)\cot\theta+c(c-x)=-h^2+ch\cot\theta$$

$$\rightarrow hx\cot\theta=h^2+c(c-x)\qquad\qquad (5)$$

Donc $(4)-(5)\rightarrow hx(\cot\phi-\cot\theta)=h^2+c(c+x)-h^2-c(c-x)=2cx$

$$\rightarrow\qquad \boxed{\cot\phi-\cot\theta=\frac{t-b}{h}=2\tan\alpha}$$

Il nous faut donc que $\tan\alpha=1$, c'est à dire que $\alpha=45°$.

Dans ce cas, $\boxed{\cot\phi-\cot\theta=2}$, quel que soit le déplacement $x=CC'$.

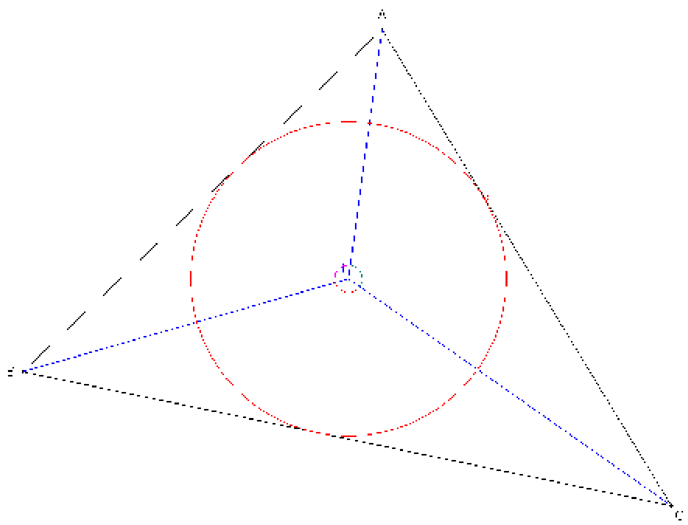
Le 3 juillet 07. Relu par Benoit Baudelet.

EXTRI225 – Facs, ULB, Bruxelles, septembre 1999

Si I est le centre du cercle inscrit du triangle ABC et si α, β et γ désignent respectivement les angles BIC, CIA, et AIB démontrer que

$$4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \sin A + \sin B + \sin C$$

Solution proposée par Benoit Baudelet



Pour rappel, I, centre du cercle inscrit est le point d'intersection des bissectrices du triangle ABC.

On a $\quad \sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ (Simpson).

Or $\ A+B+C=\pi$, donc $\ \sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{\pi-C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{\widehat{C}}{2}$.

On peut donc écrire que $\ \sin\widehat{A}+\sin\widehat{B}=2\cos\frac{\widehat{C}}{2}\cos\frac{\widehat{A-B}}{2}$.

D'autre part,

$$\sin\widehat{C}=2\sin\frac{\widehat{C}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}=2\sin\frac{\pi-\left(\widehat{A+B}\right)}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\widehat{A+B}}{2}\right)\cos\frac{\widehat{C}}{2}=2\cos\frac{\widehat{A+B}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\sin\widehat{A}+\sin\widehat{B}+\sin\widehat{C} &= 2\cos\frac{\widehat{C}}{2}\cos\frac{\widehat{A-B}}{2}+2\cos\frac{\widehat{A+B}}{2}\cos\frac{\widehat{C}}{2}\\
&= 2\cos\frac{\widehat{C}}{2}\left(\cos\frac{\widehat{A-B}}{2}+\cos\frac{\widehat{A+B}}{2}\right)\\
&= 2\cos\frac{\widehat{C}}{2}\left(2\cos\frac{\frac{\widehat{A-B}}{2}+\frac{\widehat{A+B}}{2}}{2}\cos\frac{\frac{\widehat{A-B}}{2}-\frac{\widehat{A+B}}{2}}{2}\right)\\
&= 4\cos\frac{\widehat{C}}{2}\cos\frac{\widehat{A}}{2}\cos\frac{\widehat{B}}{2}
\end{aligned}$$

Or, on a successivement

- $\alpha+\frac{\widehat{B}}{2}+\frac{\widehat{C}}{2}=\pi$ (angles du triangle BIC) donc

  $$\sin\alpha=\sin\left(\pi-\frac{\widehat{B+C}}{2}\right)=\sin\frac{\widehat{B+C}}{2}=\sin\frac{\pi-\widehat{A}}{2}=\cos\frac{\widehat{A}}{2}$$

- $\beta+\frac{\widehat{A}}{2}+\frac{\widehat{C}}{2}=\pi$ (angles du triangle AIC) donc

  $$\sin\beta=\sin\left(\pi-\frac{\widehat{A+C}}{2}\right)=\sin\frac{\widehat{A+C}}{2}=\sin\frac{\pi-\widehat{B}}{2}=\cos\frac{\widehat{B}}{2}$$

- $\gamma+\frac{\widehat{A}}{2}+\frac{\widehat{B}}{2}=\pi$ (angles du triangle AIB) donc

  $$\sin\gamma=\sin\left(\pi-\frac{\widehat{A+B}}{2}\right)=\sin\frac{\widehat{A+B}}{2}=\sin\frac{\pi-\widehat{C}}{2}=\cos\frac{\widehat{C}}{2}$$

On a donc bien finalement que $\boxed{4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin\widehat{A}+\sin\widehat{B}+\sin\widehat{C}}$.

Le 17 juillet 07. Relu par Steve Stumson.

EXTRI226 – Bruxelles, juillet 1999

Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}_0$ tel que $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$, on a

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+....+\cos(n-1)\theta=\frac{\cos\frac{(n-1)\theta}{2}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Solution proposée par Benoit Baudelet

Posons : $S_n=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+....+\cos(n-1)\theta$

$$T_n=\frac{\cos\frac{(n-1)\theta}{2}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

On doit donc montrer que $S_n=T_n\left(=f_n\right)$.

(1) f_1 est vraie. En effet, $S_1=1$ et $T_1=\frac{1.\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=1$ car $\sin\frac{\theta}{2}\neq 0$ par hypothèse.

(2) Supposons que f_n soit vraie et montrons qu'alors f_{n+1} est alors vraie.
En effet :

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= 1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\ldots+\cos(n-1)\theta+\cos n\theta \\
&= \left(1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\ldots+\cos\left((n-1)\theta\right)\right)+\cos n\theta \\
&= S_n+\cos n\theta \\
&= \frac{\cos\frac{(n-1)\theta}{2}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}+\cos n\theta \\
&= \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\cos\frac{(n-1)\theta}{2}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}+\cos n\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}\right] \\
&= \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\left(\cos\frac{n\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{n\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sin\frac{n\theta}{2}+\left(\cos^2\frac{n\theta}{2}-\sin^2\frac{n\theta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\theta}{2}\right] \\
&= \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\cos\frac{n\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}+\cancel{\sin^2\frac{n\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}}+\cos^2\frac{n\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}-\cancel{\sin^2\frac{n\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\cos\frac{n\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}+\cos^2\frac{n\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\right] \\
&= \frac{\cos\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}+\cos\frac{n\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\right] \\
&= \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\cos\frac{n\theta}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= T_{n+1}
\end{aligned}
$$

Le 17 juillet 07. Relu par Steve Stumson.

EXTRI227 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 1999
FACSA, ULG, Liège, Juillet 10.

Résoudre l'équation

$$\cos^4 x + \sin^4 x = \sin x.\cos x$$

Solution proposée par Benoit Baudelet

On a successivement

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 = 1$$
$$\cos^4 x + 2\cos^2 x.\sin^2 x + \sin^4 x = 1$$
$$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x.\sin^2 x$$

L'équation initiale devient alors

$$1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x = \sin x.\cos x \Leftrightarrow 2\sin^2 x.\cos^2 x + \sin x.\cos x - 1 = 0$$

On pose $t = \sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ et l'équation devient alors $2t^2 + t - 1 = 0$

dont les solutions sont $t_1 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $t_2 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{4} = -1$.

- $t = \dfrac{1}{2}\sin 2x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $t = \dfrac{1}{2}\sin 2x = -1 \Rightarrow \sin 2x = -2$: à rejeter.

Finalement : $\boxed{S = \left\{ \dfrac{\pi}{4} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}}$

Le 17 juillet 07. Relu par Steve Stumson.

EXTRI228 – ERM, juillet 2003

Montrer que $\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$.

Solution proposée par Benoit Baudelet

Puisque $\tan 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$, on a $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}$ ou encore, en posant $\tan\frac{\pi}{12} = x$,

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2x}{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$$

et puisque $\Delta = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4.1.(-1) = 16$, les deux solutions de cette dernière équation sont

$$x_1 = 2-\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 2+\sqrt{3}$$

Mais, $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{4}$, donc $0 = \tan 0 < \tan\frac{\pi}{12} < \tan\frac{\pi}{4} = 1$, donc finalement

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}}$$

Le 17 juillet 07. Relu par Steve Stumson.

EXTRI229 – ERM, juillet 2003

On donne le triangle ABC où $\overline{BC} = 10$, $\overline{AC} = 4$ et $\cos B = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

On demande de calculer la valeur de l'angle A.

Solution proposée par Benoit Baudelet

- Puisque $\cos B = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, on a $\sin B = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2} = \dfrac{1}{5}$.
- Grâce à la relation des sinus dans le triangle ABC, on a $\dfrac{\overline{AC}}{\sin B} = \dfrac{\overline{BC}}{\sin A}$,

  d'où $\sin A = \dfrac{\overline{BC}\sin B}{\overline{AC}} = \dfrac{10 \cdot \frac{1}{5}}{4} = \dfrac{1}{2}$ et donc $\boxed{A = 30°}$.

Le 17 juillet 07. Relu par Steve Stumson.