

Exercices résolus de mathématiques.

# Trigonométrie

# Calcul numérique

**TRI 23**

**EXTRI230-EXTRI239**

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Juillet 08

## EXTRI230 – ERM, juillet 2003

Si  $\sin \alpha = \frac{4}{25}$  avec  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ , calculer  $\tan \alpha$  et  $\cos 2\alpha$

---

Solution proposée par Benoit Baudelet

- Puisque  $\sin \alpha = \frac{4}{25}$  avec  $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ , on a

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{25}\right)^2} = \frac{-\sqrt{609}}{25}$$

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{-\sqrt{609}}{25}} = \frac{-4}{\sqrt{609}} = \boxed{\frac{-4\sqrt{609}}{609}}$ .

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \left( \frac{-\sqrt{609}}{25} \right)^2 - 1 = \boxed{\frac{593}{625}}$$

---

Le 17 juillet 07. Relu par Steve Stumson.

## EXTRI231 – FSA, UCL, septembre 2007

Pour les affirmations suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses :

- 1) Un triangle  $ABC$  est aigu en  $A$  si  $a^2 + b^2 < c^2$  (avec  $a$  le côté opposé à  $A$ )
- 2) Il y a plus d'une solution  $x$  pour l'inéquation :  $\cos^2 x > 2(1 + \sin x)^2$
- 3) L'équation suivante est une identité :  $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$
- 4) Le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$  ou  $C$  si  $\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A$

---

### Solution proposée par Steve Tumson

1) VRAI.  $ABC$  est un triangle quelconque  $\rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Si  $A$  est un angle aigu, alors  $\cos A > 0 \rightarrow a^2 < b^2 + c^2$

Cette équation est compatible avec la relation donnée. En effet,

$$\begin{cases} a^2 < b^2 + c^2 \\ a^2 + b^2 < c^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - c^2 < b^2 \\ b^2 < c^2 - a^2 \end{cases} \rightarrow a^2 - c^2 < c^2 - a^2 \rightarrow 2a^2 < 2c^2 \rightarrow a^2 < c^2$$

Or selon l'hypothèse de départ :  $a^2 + b^2 < c^2 \rightarrow a^2 < c^2$

Conclusion : la proposition est vraie.

2) VRAI : le premier terme oscille entre 0 et 1 tandis que le second oscille entre 0 et 8 !

On a :  $\cos^2 x > 2(1 + \sin x)^2 \rightarrow 1 - \sin^2 x > 2 + 4\sin x + 2\sin^2 x \rightarrow 3\sin^2 x + 4\sin x + 1 < 0$

Cette équation du second degré admet deux racines :  $\sin x = -1$  et  $\sin x = -\frac{1}{3}$

et elle sera négative entre ces racines.

Par conséquent, l'équation de départ admet une infinité de solutions dans  $\left]-1, -\frac{1}{3}\right[$

$$\begin{aligned} 3) \text{ VRAI : } \sin(a+b)\sin(a-b) &= \frac{1}{2}(\cos 2b - \cos 2a) = \frac{1}{2}(\cos^2 b - \sin^2 b - \cos^2 a + \sin^2 a) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \sin^2 b - \sin^2 b - 1 + \sin^2 a + \sin^2 a) = \sin^2 a - \sin^2 b \end{aligned}$$

4) FAUX : si  $B$  est droit, alors on peut réécrire l'équation :

$$1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin^2 A \Leftrightarrow 1 + \cos^2 A = \sin^2 A \Leftrightarrow \cos 2A = -1 \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Or si  $B$  est droit,  $A$  ne peut pas l'être aussi.

---

Le 17 septembre 07.

## EXTRI232 – FSA, UCL, septembre 2007

Je suis dans un TGV qui roule à 240 km/h. A ma droite il y a une autoroute parallèle à la voie ferrée.

J'observe une voiture que le train rattrape et qui roule à une vitesse constante à  $45^\circ$  de ma trajectoire (observation A). Une minute plus tard, j'observe cette même voiture à  $60^\circ$  de ma trajectoire (observation B).

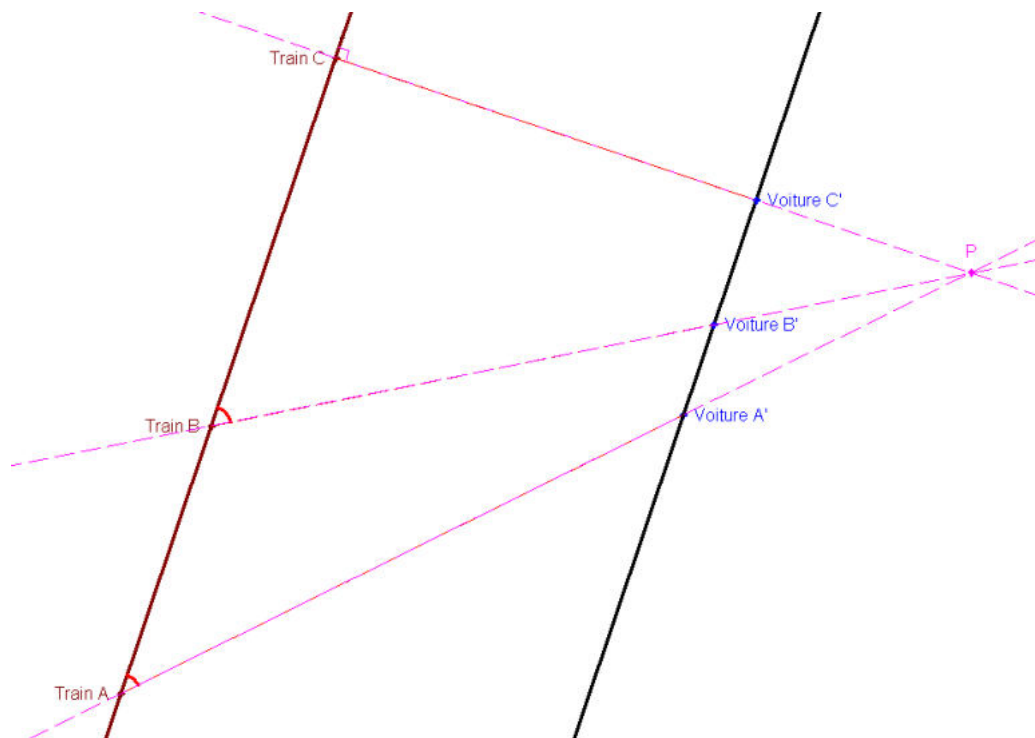
Quelques temps plus tard, le train sera à la même hauteur que la voiture. A ce moment là, j'observerai cette voiture à  $90^\circ$  (observation C).

Remarque : on admettra que les lignes reliant l'observateur et la voiture, passent par un même point pour les trois observations (cela découle de la vitesse constante du train et de la voiture).

- 1) Faites un croquis de la situation et indiquez tous les angles et les distances utiles dans vos calculs.
- 2) Quelle distance est parcourue par le train entre les observations A et B ?
- 3) Quelle distance est parcourue par le train entre l'observation B et C ? Donner également les formules expliquant vos calculs
- 4) Si la voiture roule à 120 km/h, quelle est la distance entre la voie ferrée et l'autoroute ?

---

### Solution proposée par Steve Tumson



$$2) e = vt \Leftrightarrow |AB| = \frac{240000}{60} = 4000 [m]$$

3) La relation au sinus nous donne dans le triangle  $APB$  :

$$\frac{|BP|}{\sin PAB} = \frac{|AB|}{\sin BPA} \Leftrightarrow \frac{|BP|}{\sin 45^\circ} = \frac{4000}{\sin 15^\circ} \Leftrightarrow |BP| = 10928 [m]$$

La relation au sinus nous donne dans le triangle  $BPC$  :

$$\frac{|CB|}{\sin 30^\circ} = \frac{|PB|}{\sin 90^\circ} \Leftrightarrow |CB| = |PB| \sin 30^\circ = 5464 [m]$$

La distance parcourue par le train est donc de 5464 mètres.

4) On déduit du point précédent que le temps entre l'observation  $B$  et  $C$  est d'approximativement 1 minute et 22 secondes.

Entre l'observation  $A$  et  $C$  il a donc 142 secondes, soit 4733 mètres parcourus par la voiture.

Dans le triangle rectangle  $A'PC'$  on a donc :

$$|PC'| = |AC'| \tan \overline{PA'C'} = 4733 \tan 45^\circ = 4733 [m]$$

La relation au sinus nous donne dans le triangle  $BPC$  :

$$\frac{|CP|}{\sin 60^\circ} = \frac{|PB|}{\sin 90^\circ} \Leftrightarrow |CP| = |PB| \sin 60^\circ = 9464 [m]$$

La distance entre la voie ferrée et l'autoroute est donc :

$$\boxed{|CC'| = |CP| - |PC'| = 4731 [m]}$$

---

Le 17 septembre 07.

## EXTRI233 – FACSA, ULG, septembre 2007

Montrer que dans tout triangle non dégénéré d'angles  $A$ ,  $B$  et  $C$ , on a

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{(\sin B + \sin C)^2 - \sin^2 A}{4 \sin B \sin C}$$

---

**Solution proposée par l'Université**

Solution

En faisant appel à la relation des sinus :  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

on peut écrire

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2 \sin B \sin C}$$

Le second membre vaut encore

$$\frac{(\sin B + \sin C)^2 - 2 \sin B \sin C - \sin^2 A}{2 \sin B \sin C} = \frac{(\sin B + \sin C)^2 - \sin^2 A}{2 \sin B \sin C} - 1$$

si bien que

$$\frac{(\sin B + \sin C)^2 - \sin^2 A}{2 \sin B \sin C} = 1 + \cos A = 2 \cos^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

---

Le 27 novembre 07.

## EXTRI233 – FACSA, ULG, septembre 2007

Résoudre l'équation

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

---

**Solution proposée par l'Université**

Solution

On remarque que

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + 3\sin^4 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x = 1$$

En soustrayant l'équation de cette identité, on obtient

$$3\sin^4 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \cos^4 x = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

Soit

$$3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 3\sin^2 x \cos^2 x = \frac{9}{16}$$

ou encore

$$\frac{3}{16} = \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x$$

On se ramène donc à

$$\sin^2 2x = \frac{3}{4}, \quad \sin^2 x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Les solutions sont

$$\begin{cases} 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi & \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \\ 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi & \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Le dessin des solutions sur le cercle trigonométrique est laissé au lecteur.

---

Le 27 novembre 07.

## EXTRI235 – FACSA, ULG, septembre 2007

Les côtés d'un triangle ont pour longueurs respectives (en mètres)

$$a = 2 \text{ m}, \quad b = 3 \text{ m}, \quad c = 4 \text{ m}$$

Que valent ses angles ?

---

**Solution proposée par l'Université**

Solution

De la relation :  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

on déduit

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 16 - 4}{2 \times 3 \times 4} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} \text{ soit } A = \arccos\left(\frac{7}{8}\right) = 0.505 \text{ rad} = 28.96^\circ$$

De la même façon,

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ac} = \frac{4 + 16 - 9}{2 \times 2 \times 4} = \frac{11}{16} \text{ ce qui donne } B = 0.8128 \text{ rad} = 46.57^\circ$$

Enfin,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4 + 9 - 16}{2 \times 2 \times 3} = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4} \text{ ce qui correspond à } C = 1.823 \text{ rad} = 104.48^\circ$$

A titre de preuve, on vérifie que

$$A + B + C = 28,96 + 46,57 + 104,48 = 180,01^\circ = 180^\circ \text{ aux erreurs d'arrondi près.}$$

---

Le 27 novembre 07.



## EXTRI236 – FACS, ULB, juillet 2007

a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$$

b) Résoudre l'équation  $\cos 4z = 0$

c) Déduire de a) et b) la valeur de  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\cos \frac{3\pi}{8}$

---

$$a) 8x^4 - 8x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{8} = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{2}}{4} \rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \frac{2+\sqrt{2}}{4} \rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{2}} \end{cases}$$

b) Utilisons la formule de Moivre :

$$\cos 4z + i \sin 4z = (\cos z + i \sin z)^4 = \cos^4 z + 4i \cos^3 z \sin z - 6 \cos^2 z \sin^2 z - 4i \cos z \sin^3 z + \sin^4 z$$

Les parties réelles étant égales, on obtient :

$$\begin{aligned} \cos 4z &= \cos^4 z - 6 \cos^2 z \sin^2 z + \sin^4 z = \cos^4 z - 6 \cos^2 z (1 - \cos^2 z) + (1 - \cos^2 z)^2 \\ &= \cos^4 z - 6 \cos^2 z + 6 \cos^4 z + 1 - 2 \cos^2 z + \cos^4 z \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\cos 4z = 8 \cos^4 z - 8 \cos^2 z + 1}$$

c) Notons que  $\cos 4 \times \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$  et  $\cos 4 \times \frac{3\pi}{8} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$

Il suffit donc d'appliquer les résultats précédents :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad \left( \frac{\pi}{8} \text{ est dans le premier quadrant donc } \cos \frac{\pi}{8} > 0 \right)$$

$$\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \left( \cos \frac{3\pi}{8} > 0 \right)$$

---

Le 27 novembre 07.

## EXTRI237 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2007

a) Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}_0^+$  on a

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

b) Résoudre  $\mathbb{R}^+$

$$\arctan x + \arctan(x-1) = \frac{\pi}{2}$$

---

a) On sait que  $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

Pour démontrer la relation, il suffit donc de montrer que :  $\operatorname{arccot} x = \arctan \frac{1}{x}$

En effet, soit  $\cot \frac{1}{y} = x \Rightarrow \tan \frac{1}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} = \arctan \frac{1}{x} \Rightarrow \cot \frac{1}{y} = \cot \arctan \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow x = \cot \arctan \frac{1}{x} \Rightarrow \operatorname{arccot} x = \operatorname{arccot} \left( \cot \arctan \frac{1}{x} \right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{arccot} x = \arctan \frac{1}{x}$$

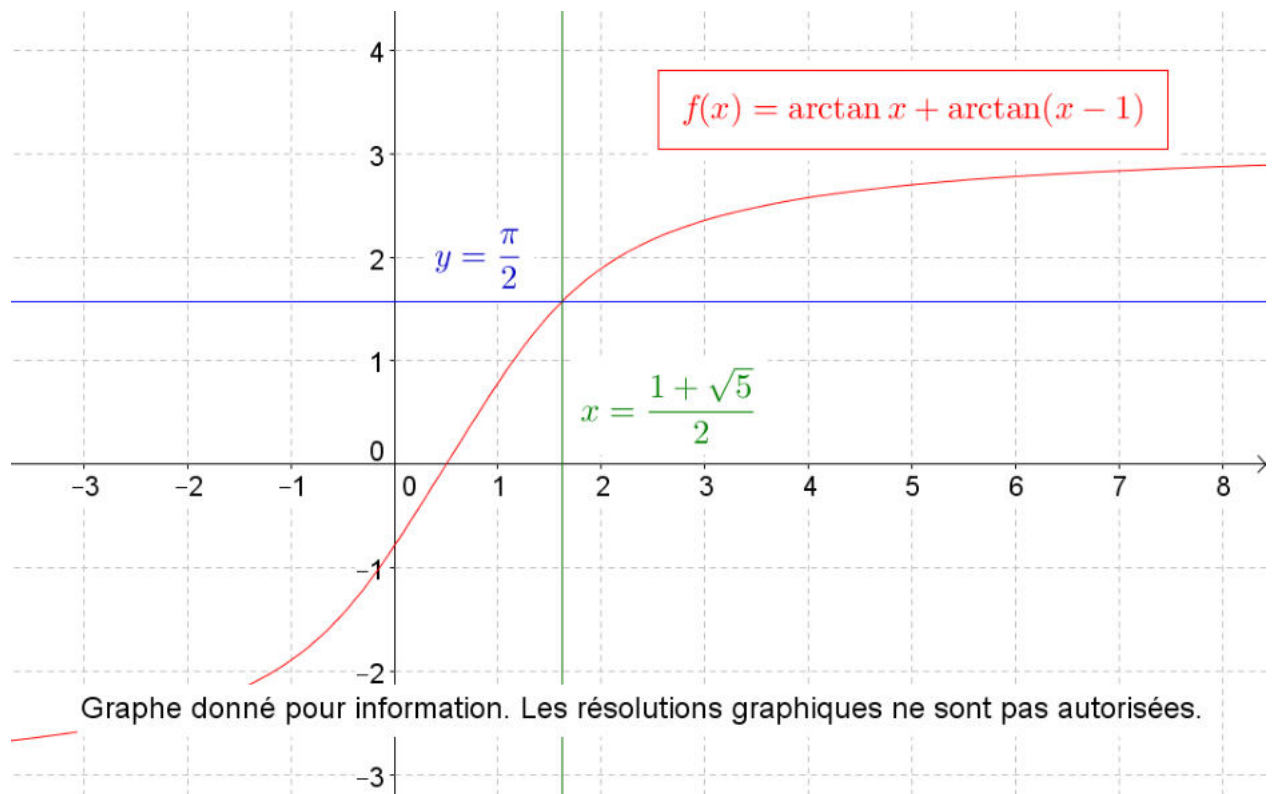
Enfinement  $\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}}$  (1)

b) Soit  $\arctan x + \arctan(x-1) = \frac{\pi}{2}$ , en comparant avec (1), on déduit

$$\arctan \frac{1}{x} = \arctan(x-1) \Rightarrow \frac{1}{x} = x-1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La racine négative  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0\right)$  doit être rejetée car si  $\alpha < 0 \Rightarrow \arctan \alpha < 0$ , or  $\frac{\pi}{2} > 0$

Conclusion :  $\boxed{x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$



Le 2 janvier 08. Modifié le 12 novembre 2014 ( Natacha Joukoff)

## EXTRI238 – FACS, ULB, septembre 2007

Soit un triangle d'angles  $A, B$  et  $C$  et dont les côtés sont de longueurs  $a, b$  et  $c$   
 Démontrer que

$$(a+b) \tan \frac{A-B}{2} + (b+c) \tan \frac{B-C}{2} + (c+a) \tan \frac{C-A}{2} = 0$$

Soit  $E = (a+b) \tan \frac{A-B}{2} + (b+c) \tan \frac{B-C}{2} + (c+a) \tan \frac{C-A}{2}$

On réarrange :  $E = a \left( \tan \frac{A-B}{2} + \tan \frac{C-A}{2} \right) + b \left( \tan \frac{A-B}{2} + \tan \frac{B-C}{2} \right) + c \left( \tan \frac{B-C}{2} + \tan \frac{C-A}{2} \right)$

Utilisons la relation  $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$

$$\rightarrow E = a \frac{\sin \frac{C-B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C-A}{2}} + b \frac{\sin \frac{A-C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2}} + c \frac{\sin \frac{B-A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2}}$$

La formule des sinus dans le triangle quelconque dit que  $\begin{cases} b = a \frac{\sin B}{\sin A} \\ c = a \frac{\sin C}{\sin A} \end{cases}$

$$\rightarrow \frac{E}{a} = \frac{\sin \frac{C-B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C-A}{2}} + \frac{\sin B}{\sin A} \frac{\sin \frac{A-C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2}} + \frac{\sin C}{\sin A} \frac{\sin \frac{B-A}{2}}{\cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2}}$$

Désignons par  $D$  le dénominateur commun :  $D = \sin A \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2}$

$$\rightarrow \frac{E \cdot D}{a} = \sin A \sin \frac{C-B}{2} \cos \frac{C-B}{2} + \sin B \sin \frac{A-C}{2} \cos \frac{A-C}{2} + \sin C \sin \frac{B-A}{2} \cos \frac{B-A}{2}$$

$$\rightarrow \frac{2E \cdot D}{a} = \sin A \sin(C-B) + \sin B \sin(A-C) + \sin C \sin(B-A)$$

Or  $A+B+C = \pi \rightarrow \begin{cases} C = \pi - (A+B) \rightarrow \sin C = \sin(A+B) \\ C-B = \pi - (A+2B) \rightarrow \sin(C-B) = \sin(A+2B) \\ A-C = 2A+B-\pi \rightarrow \sin(A-C) = -\sin(2A+B) \end{cases}$

Donc  $\frac{2E \cdot D}{a} = \sin A \sin(A+2B) - \sin B \sin(2A+B) + \sin(A+B) \sin(B-A)$

Développons :

$$\begin{aligned} \frac{2E \cdot D}{a} &= \sin A (\sin A \cos 2B + \cos A \sin 2B) - \sin B (\sin 2A \cos B + \cos 2A \sin B) \\ &\quad + (\sin A \cos B + \cos A \sin B) (\sin B \cos A - \cos B \sin A) \\ &= \sin^2 A (\cos^2 B - \sin^2 B) + \underline{2 \sin A \cos A \sin B \cos B} \\ &\quad - \underline{2 \sin A \cos A \sin B \cos B} - \sin^2 B (\cos^2 A - \sin^2 A) + \sin^2 B \cos^2 A - \cos^2 B \sin^2 A \\ &= \cancel{\sin^2 A \cos^2 B} - \cancel{\sin^2 A \sin^2 B} - \cancel{\sin^2 B \cos^2 A} + \cancel{\sin^2 B \sin^2 A} + \cancel{\sin^2 B \cos^2 A} - \cancel{\cos^2 B \sin^2 A} \\ &= 0 \rightarrow \boxed{E=0} \end{aligned}$$

## EXTRI239 – FACS, ULB, septembre 2007

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$2\sin^2 x + 4\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 1$$

---

$$2\sin^2 x + 4\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 1$$

$$\text{Divisons par } \cos^2 x \rightarrow 2\tan^2 + 4\tan x - 4 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{Or } \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\rightarrow 2\tan^2 + 4\tan x - 4 = 1 + \tan^2 x \rightarrow \tan^2 x + 4\tan x - 5 = 0$$

$$\rightarrow (\tan x - 1)(\tan x + 5) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \tan x = 1 & \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi} \\ \tan x = -5 & \rightarrow \boxed{x = -1.373 + k\pi} \end{cases}$$

---

Le 2 janvier 08.