Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 25

EXTRI250-EXTRI259

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Juillet 08

EXTRI250 – EPL, UCL, Louvain, juillet 07

Démontrer qu'un triangle est rectangle et isocèle quand on a :

$$\tan C = \frac{1+\tan(45°-B)}{1-\tan(45°-B)}$$

et $4S = a^2$

A, B, C sont les angles; a, b et c sont les côtés et S l'aire du triangle

---

Notons que : $\tan(45°-B) = \dfrac{\tan 45° - \tan B}{1+\tan 45° \tan B} = \dfrac{1-\tan B}{1+\tan B}$

Transformons la première équation :

$$\tan C = \frac{1+\tan(45°-B)}{1-\tan(45°-B)} = \frac{1+\dfrac{1-\tan B}{1+\tan B}}{1-\dfrac{1-\tan B}{1+\tan B}} = \frac{1+\tan B+1-\tan B}{1+\tan B-1+\tan B} = \frac{1}{\tan B}$$

Autrement dit : $\tan B \tan C = 1$ or nous avons aussi la relation classique : $\tan B . \cot B = 1$

Ce qui par comparaison veut dire qu'ici : $\tan C = \cot B \to \tan C = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - B\right) \to C = \dfrac{\pi}{2} - B$

$\to C + B = \dfrac{\pi}{2} \to A = \dfrac{\pi}{2}$ ce qui démontre que le triangle est rectangle.

Montrons maintenant que le triangle est isocèle.

L'aire d'un triangle est donnée par : $S = \dfrac{1}{2} ab \sin C$

Ici, $4S = a^2 \to S = \dfrac{a^2}{4}$ donc $\dfrac{a^2}{4} = \dfrac{1}{2} ab \sin C \to a^2 = 2ab \sin C \to a = 2b \sin C \quad (1)$

Or puisque le triangle est rectangle : $b = a \sin B$

$(1) \to a = 2a \sin B \sin C \to 2 \sin B \sin C = 1 \to 2 \sin B \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - B\right) = 1 \to 2 \sin B \cos B = 1$

$\to \sin 2B = 1 \to 2B = \dfrac{\pi}{2} \to B = \dfrac{\pi}{4} \to C = \dfrac{\pi}{4}$ et donc le triangle est isocèle.

Le 26 août 08

EXTRI251 – EPL, UCL, Louvain, juillet 07

Pour les affirmations suivantes, cochez vrai si l'affirmation est vraie, ou faux si l'affirmation est fausse.

- Dans un triangle il y a toujours au moins en angle entre 30° et 150°

  Vrai □ Faux □

- L'expression $\cos^4 a - 3\cos^2 a \sin^2 a + \sin^4 a$ change 4 fois de signe dans l'intervalle $-\pi < a < \pi$

  Vrai □ Faux □

- L'équation suivante est une identité (pour $a \pm b \neq k\pi$ et $b \neq k\pi$)

$$\frac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{\tan(a+b)-\tan(a-b)} = \frac{\sin 2a}{\sin 2b}$$

  Vrai □ Faux □

- Le triangle ABC est rectangle en A, si et seulement si

$$\sin B + \sin C = \cos B + \cos C$$

  Vrai □ Faux □

- FAUX

Exemple un triangle isocèle avec les angles à la base égaux à 1°, le troisième vaut 178°

- VRAI

Transformons la relation :

$$E = \cos^4 a - 3\cos^2 a \sin^2 a + \sin^4 a = \left(\cos^2 a - \sin^2 a\right)^2 - \cos^2 a \sin^2 a = \cos^2 2a - \frac{1}{4}\sin^2 2a$$

$$= \frac{1}{4}\left(4\cos^2 2a - \sin^2 2a\right) = \frac{1}{4}\left(5\cos^2 2a - 1\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}\cos 2a - 1\right)\left(\sqrt{5}\cos 2a + 1\right)$$

Les racines sont : $\begin{cases} \cos 2a = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow 2a = \pm 1.107 \text{ rad} \rightarrow a = \pm 0.55 \text{ rad} \\ \cos 2a = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow 2a = \pm 2.034 \text{ rad} \rightarrow a = \pm 1.017 \text{ rad} \end{cases}$

Tableau de signe

	π		-1.017		-0.55		0.55		1.017		π
$\sqrt{5}\cos 2a - 1$	+	+	+	+	0	−	0	+	+	+	+
$\sqrt{5}\cos 2a + 1$	−	−	0	+	+	+	+	+	0	−	−
E	−	−	0	+	0	−	0	+	0	−	−

Il y a donc bien quatre changements de signe entre $-\pi$ et π

- VRAI

$$\frac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{\tan(a+b)-\tan(a-b)} = \frac{\dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b} + \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}}{\dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b} - \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}}$$

$$= \frac{\tan a + \cancel{\tan b} + \cancel{\tan^2 a \tan b} + \tan a \tan^2 b + \tan a - \cancel{\tan b} - \cancel{\tan^2 a \tan b} + \tan a \tan^2 b}{\cancel{\tan a} + \tan b + \tan^2 a \tan b + \cancel{\tan a \tan^2 b} - \cancel{\tan a} + \tan b + \tan^2 a \tan b - \cancel{\tan a \tan^2 b}}$$

$$= \frac{2\tan a + 2\tan a \tan^2 b}{2\tan b + 2\tan^2 a \tan b} = \frac{2\tan a\left(1+\tan^2 b\right)}{2\tan b\left(1+\tan^2 a\right)} = \frac{\dfrac{2\tan a}{1+\tan^2 a}}{\dfrac{2\tan b}{1+\tan^2 b}} = \frac{\sin 2a}{\sin 2b}$$

- VRAI

Si le triangle est rectangle en A, alors : $\sin B + \sin C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos C + \cos B$

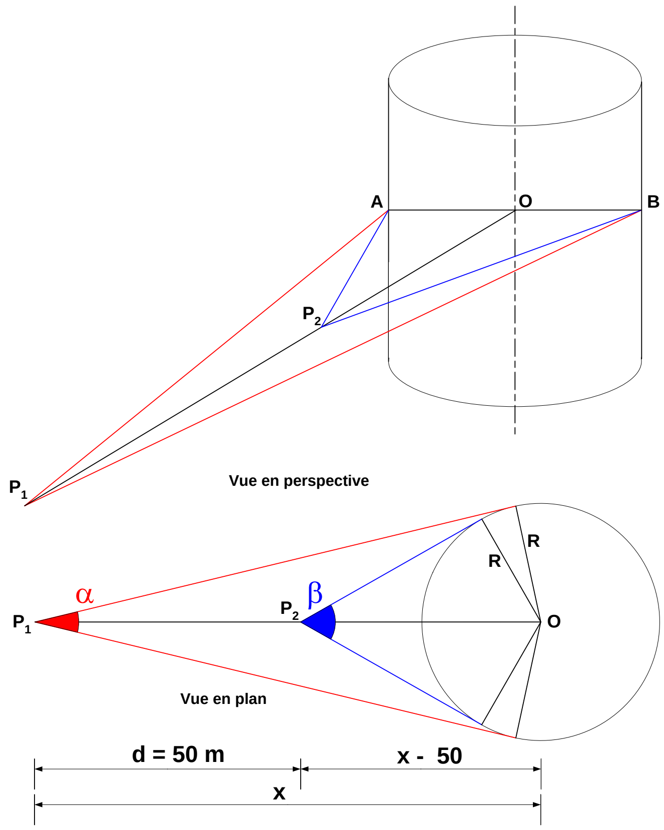
Et si, $\sin B + \sin C = \cos B + \cos C \rightarrow 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{B-C}{2} = 0 \rightarrow \dfrac{B-C}{2} = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow B - C = \pi \rightarrow B = C + \pi \quad \text{A rejeter} \\ \sin\dfrac{B+C}{2} = \cos\dfrac{B+C}{2} \rightarrow \dfrac{B+C}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{B+C}{2} \rightarrow B + C = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow A = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

EXTRI252 – EPL, UCL, Louvain, juillet 07

On veut déterminer le rayon r d'une tour cylindrique que l'on observe en se promenant.
L'angle de vision de la tour est l'angle (dans le plan horizontal) entre les deux extrémités observées de la tour.
Une première observation faite à une distance x du centre de la tour consiste à mesurer un angle de vision horizontal α de 10°.
On se rapproche ensuite d'une distance d de 50 mètres du centre de la tour et on mesure maintenant un angle de vision horizontal de β de 15°.

1) Faites un croquis de la situation et indiquez les angles observés.
2) Donnez les équations qui peuvent déterminer r et x.
3) Calculer le rayon r de la tour et la distance originale x pour les données α, β et d.
   Donner les résultats au centimètre près.



Sur base des schémas, il est immédiat que :

$$R = x\sin\frac{\alpha}{2} = (x-50)\sin\frac{\beta}{2} \rightarrow x = 50\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}} = 50\frac{\sin 7.5}{\sin 7.5 - \sin 5} = \boxed{150.48\ m}$$

Et donc : $R = 150.48\sin 5 = \boxed{13.12\ m}$

Le 26 août 08

EXTRI253 – FPMS, Mons, 2002

Si A, B, C et D sont les angles internes d'un quadrilatère, démontrer que la relation suivante est vérifiée :

$$\sin(A+C)\times\sin(A+D)=\sin(B+C)\times\sin(B+D)$$

Solution proposée par Steve Tumson

$$A+B+C+D=2\pi \Rightarrow D=2\pi-A-B-C$$

$$\to \sin(A+C)\times\sin(A+2\pi-A-B-C)=\sin(B+C)\times\sin(B+2\pi-A-B-C)$$

$$\Leftrightarrow \sin(A+C)\times\sin(2\pi-B-C)=\sin(B+C)\times\sin(2\pi-A-C)$$

$$\Leftrightarrow -\sin(A+C)\times\sin(B+C)=-\sin(B+C)\times\sin(A+C)$$

Septembre 08

EXTRI254 – FPMS, Mons, 2002

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\tan(x)+\tan(2x)=\tan(3x)$$

Solution proposée par Steve Tumson

Conditions d'existence :

$$\begin{cases} \cos(x)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi & \forall k\in\mathbb{Z} \\ \cos(2x)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} & \forall k\in\mathbb{Z} \\ \cos(3x)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3} & \forall k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\tan(x)+\tan(2x)=\tan(3x)\xrightarrow{\tan p+\tan q}\frac{\sin(3x)}{\cos(x)\cos(2x)}=\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}$$

$$\Rightarrow \sin(3x)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x=\pi+k\pi \qquad \forall k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{3} \qquad \forall k\in\mathbb{Z}}$$

$$\cos(x)\cos(2x)=\cos(3x)\xrightarrow{\cos p.\cos q}\frac{1}{2}\big(\cos(3x)+\cos(x)\big)=\cos(3x)\Leftrightarrow \cos(3x)+\cos(x)=2\cos(3x)$$

$$\Rightarrow \cos(x)=\cos(3x)$$

$$\Leftrightarrow x=\pm 3x+2k\pi \Leftrightarrow \boxed{x=k\frac{\pi}{2} \qquad \forall k\in\mathbb{Z}} \quad ou \quad \boxed{x=k\pi \qquad \forall k\in\mathbb{Z}}$$

Vu les conditions d'existence, il faut préciser $x=k\dfrac{\pi}{2} \quad \forall k\in\mathbb{Z}$ paires

Ce qui revient en fait à écrire : $x=(2k')\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=k'\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z}$

$$\boxed{S=\left\{x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{3};x=k\pi\right\}}$$

---

septembre 08

EXTRI255 – FPMS, Mons, 2002

Si A, B et C sont les angles internes d'un triangle, démontrer que la relation suivante est vérifiée :

$$\sin^2(A)+\sin^2(B)+\sin^2(C)=2+2\cos(A)\cos(B)\cos(C)$$

Solution proposée par Steve Tumson

$$A+B+C=\pi \Rightarrow C=\pi-A-B$$

$$\Rightarrow \sin^2(A)+\sin^2(B)+\sin^2(\pi-A-B)=2+2\cos(A)\cos(B)\cos(\pi-A-B)$$

Il faut donc démontrer que :

$$\boxed{\sin^2(A)+\sin^2(B)+\sin^2(A+B)}=2-2\underbrace{\cos(A)\cos(B)}_{\cos p.\cos q}\cos(A+B)$$

Le terme de droite peut donc se réécrire :

$$\Leftrightarrow 2-2\left(\frac{1}{2}\left(\cos(A+B)+\cos(A-B)\right)\right)\cos(A+B) \Leftrightarrow 2-\left(\cos(A+B)+\cos(A-B)\right)\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 2-\cos^2(A+B)-\cos(A-B)\cos(A+B) \Leftrightarrow 2-\left(1-\sin^2(A+B)\right)-\cos(A-B)\cos(A+B)$$

$$\Leftrightarrow 1+\sin^2(A+B)-\underbrace{\cos(A-B)\cos(A+B)}_{\cos p.\cos q} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\left(\cos(2A)+\cos(2B)\right)+\sin^2(A+B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos(2A)}{2}+\frac{1-\cos(2B)}{2}+\sin^2(A+B)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sin^2(A)+\sin^2(B)+\sin^2(A+B)}$$

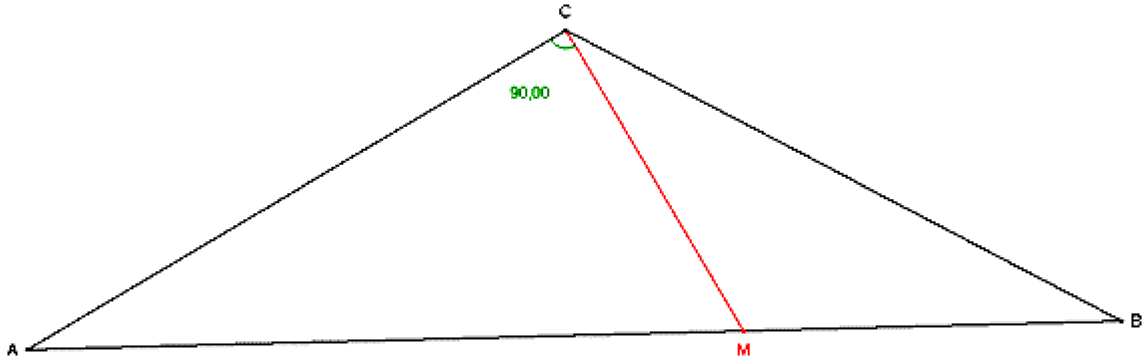
Septembre 08

EXTRI256 – FPMS, Mons, 2002

Dans un triangle ABC, on a :

- $AC = CB$
- M étant un point de la droite AB : $AM = 2MB$ et MC perpendiculaire à AC
- Résoudre le triangle connaissant AC (qui vaut 3 mètres)

Solution proposée par Steve Tumson



Données: $\begin{cases} AC = CB = 3 \Rightarrow A = B < 90° \\ AM = 2MB \end{cases}$

Dans le triangle rectangle AMC: $\begin{cases} AM\cos(A) = AC \\ AC\tan(A) = CM \end{cases}$

Dans le triangle MBC :

$$CM^2 = CB^2 + MB^2 - 2\times CB\times MB\times\cos(B) \Leftrightarrow AC^2\tan^2(A) = CB^2 + \frac{AM^2}{4} - CB\times AM\times\cos(A)$$

$$\Leftrightarrow AC^2\tan^2(A) = CB^2 + \frac{AC^2}{4\cos^2(A)} - CB\times\frac{AC}{\cos(A)}\times\cos(A) \Leftrightarrow 9\tan^2(A) = 9 + \frac{9}{4\cos^2(A)} - 9$$

$$\Leftrightarrow \tan^2(A) = \frac{1}{4\cos^2(A)} \Leftrightarrow \sin^2(A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin(A) = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\widehat{A = B} = 30°} \Rightarrow \boxed{\widehat{C} = 120°}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{AC}{\cos A} = \frac{3}{\sqrt{3}/2} \Leftrightarrow AM = 2\sqrt{3} \Rightarrow MB = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{AB = 3\sqrt{3}}$$

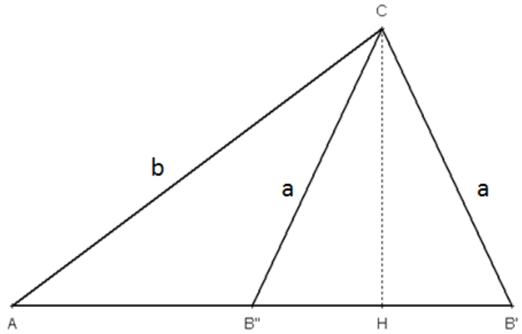
EXTRI257 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2008

Si dans un triangle on connait a, b et A, il existe deux solutions : le triangle $AB'C$ et le triangle $AB''C$.

1. Calculer la différence $AB' - AB''$
2. Calculer l'aire du triangle $B'CB''$
3. Si C' et C'' sont les deux valeurs de C, montrer que :

$$\tan A = \cot \frac{C'+C''}{2}$$

Solution proposée par Steve Tumson



1.

$$\Delta AB''C \to \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin AB''C} = \frac{AB''}{\sin ACB''} \Rightarrow \sin AB''C = \frac{b\sin A}{a} \Rightarrow \cos AB''C = -\sqrt{1-\frac{b^2\sin^2 A}{a^2}}$$

$$* \; CB''B' = CB'B'' = 180° - AB''C \Rightarrow \sin AB''C = \sin AB'C \Leftrightarrow \cos AB''C = -\cos AB'C$$

$$\Delta CB''B' \to \frac{a}{\sin AB'C} = \frac{B''B'}{\sin B'CB''}$$

$$*\sin B'CB'' = \sin\left(180° - 2AB'C\right) = \sin\left(2AB'C\right) = 2\sin\left(AB'C\right)\cos\left(AB'C\right) = 2\frac{b\sin A}{a}\sqrt{1-\frac{b^2\sin^2 A}{a^2}}$$

$$\Rightarrow B''B' = \frac{a\sin B'CB''}{\sin AB'C} = \frac{2b\sin A\sqrt{1-\frac{b^2\sin^2 A}{a^2}}}{\frac{b\sin A}{a}} \Leftrightarrow \boxed{B''B' = 2a\sqrt{1-\frac{b^2\sin^2 A}{a^2}} = 2\sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A}}$$

2.

$$Aire = \frac{AB' \times CH}{2}$$

Grâce aux relations du point précédent, on peut aussi trouver que :

$$\to AB'' = \frac{a\sin ACB''}{\sin A} = \frac{a\sin\left(180° - A - AB''C\right)}{\sin A} = \frac{a\sin\left(A + AB''C\right)}{\sin A} = \frac{a\left(\sin A\cos AB''C + \cos A\sin AB''C\right)}{\sin A}$$

$$AB'' = a\left(-\sqrt{1-\frac{b^2\sin^2 A}{a^2}} + \frac{b\cos A}{a}\right) = -\sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A} + b\cos A \Rightarrow AB' = \sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A} + b\cos A$$

$$\to CH = b\sin a$$

$$\Rightarrow \boxed{Aire = \frac{b\sin A}{2}\left(\sqrt{a^2 - b^2\sin^2 A} + b\cos A\right)}$$

3.

Ici, , l'angle noté C' est donc l'angle ACB' et l'angle noté C'' est l'angle ACB''

$$\Delta AB'C \to \tan A = \tan(180° - C' - AB'C) = -\tan(C' + AB'C)$$

$$\Delta B'CB'' \to C' - C'' + 2AB'C = 180° \Leftrightarrow AB'C = \frac{180° - C' + C''}{2} = 90° - \frac{C'}{2} + \frac{C''}{2}$$

$$\Rightarrow \tan A = -\tan\left(C' + 90° - \frac{C'}{2} + \frac{C''}{2}\right) = \cot\left(C' - \frac{C'}{2} + \frac{C''}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{\tan A = \cot\left(\frac{C'+C''}{2}\right)}$$

17 Septembre 08

EXTRI258 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2008

Vrai ou Faux ?

1) Dans un triangle la somme de deux angles quelconques est toujours supérieure ou égale à 60°

2) L'expression $\dfrac{2\cos a - 4\sin a}{\cos a}$ est positive dans tout l'intervalle $0 < a < \pi / 4$

3) L'équation suivante a une racine double en x pour toute valeur de l'angle φ

$$x^2 + 2x\cos\varphi + \frac{\cos(2\varphi)+1}{2} = 0$$

4) Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A$

Solution proposée par Steve Tumson

1) FAUX

On peut en effet reformuler l'affirmation comme suit :

Dans un triangle un angle quelconque est toujours inférieur ou égale à 120° ; ce qui est absurde.

2)FAUX

$\frac{2\cos a - 4\sin a}{\cos a} = 2(1-2\tan a) \to \exists$ une racine quand $\tan a = \frac{1}{2}$, puisque en 0 la tangente est nulle et en $\pi/4$ elle vaut 1, il y a une racine dans l'intervale $0 < a < \pi/4$, l'expression n'est donc pas toujours positive

3) VRAI

$$x^2 + 2x\cos\varphi + \frac{\cos(2\varphi)+1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x\cos\varphi + \cos^2\varphi = 0 \Rightarrow \rho = 4\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

4) VRAI

$$\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A \Leftrightarrow \sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 C$$

$$\to (\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B) = \left(2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\right)\left(2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right)$$

$$= \left(2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right)\left(2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right) = \sin(A-B)\sin(A+B)$$

$$= \sin(A-B)\sin(A+B)$$

$$\to \sin^2 C = \sin^2(180° - A - B) = \sin^2(A+B)$$

$\Rightarrow$ Il faut donc $\sin(A-B) = \sin(A+B)$

$\to A+B = A-B+k360° \Leftrightarrow 2B = k360° \Leftrightarrow B = k180° \to$ Impossible !

$\to A+B = 180° - (A-B) + k360° \Leftrightarrow 2A = 180° + k360° \Rightarrow A = 90°$

---

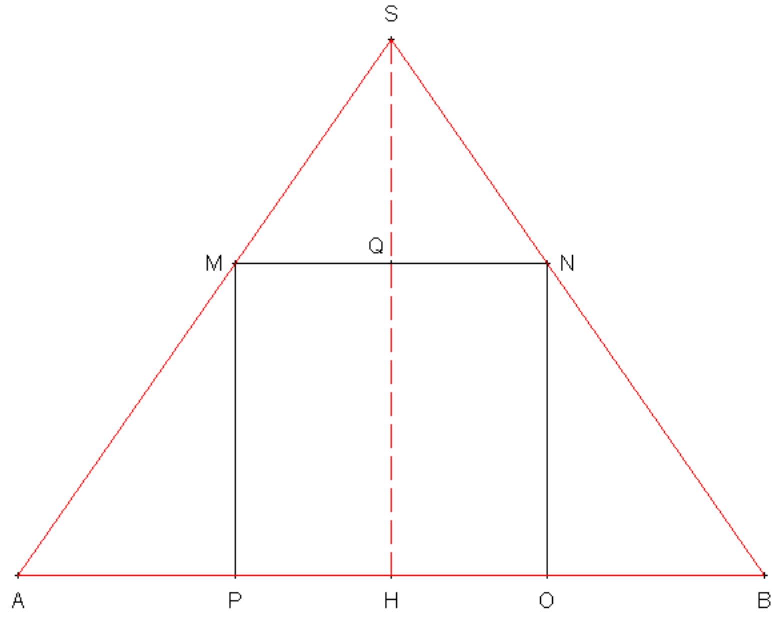
17 Septembre 08

EXTRI259 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2008

On cherche la plus petite tente de camping possible dans laquelle on peut poser une boîte cubique de $(1\text{m})\times(1\text{m})\times(1\text{m})$.
La section de la tente est un triangle isocèle avec un angle α à la base.

On vous demande de trouver la hauteur H et la longueur L tel que le volume de la tente qui puisse contenir exactement la boîte, soit minimal.

Solution proposée par Steve Tumson



Le problème peut se résumer à un problème plan. En effet, le volume de la tente est directement proportionnel à la longueur L et cette longueur n'intervient pas dans la section de la tente ! Pour minimiser le volume, il faudra donc prendre L le plus petit possible, donc prendre $\boxed{L = 1m}$

Il suffit maintenant d'optimiser la section de la tente, c'est à dire trouver une hauteur qui optimiserait celle-ci.

$$\Delta AMP \rightarrow \tan\alpha = \frac{MP}{AP} = \frac{1}{AP} \Leftrightarrow AP = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow AB = 2AP + 1 = \frac{2}{\tan\alpha} + 1$$

$$\Delta MSQ \rightarrow \tan\alpha = \frac{SQ}{1/2} = 2SQ \Leftrightarrow SQ = \frac{\tan\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow SH = SQ + 1 = \frac{\tan\alpha}{2} + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{S(\alpha) = \frac{1}{2}AB \times SH = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tan\alpha} + 1\right)\left(\frac{\tan\alpha}{2} + 1\right)}$$

Le minimum est atteint quand la dérivée s'annule :

$$\frac{dS(\alpha)}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{\tan^2\alpha.\cos^2\alpha}\right)\left(\frac{\tan\alpha}{2} + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tan\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{2\cos^2\alpha}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{\tan^2\alpha.\cos^2\alpha} + \frac{1}{2\cos^2\alpha} = 0 \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 4 \Rightarrow \tan\alpha = \pm 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 63,4°} \quad \text{ou} \quad \alpha = 134,3° \rightarrow \text{A rejeter}$$

$$\Rightarrow SH = h = \frac{\tan\alpha}{2} + 1 \Leftrightarrow \boxed{h = 2m}$$

<u>N.B.</u>

$$\frac{d^2S(\alpha)}{d\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{\tan^2\alpha.\cos^2\alpha}\right)\left(\frac{\tan\alpha}{2} + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tan\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{2\cos^2\alpha}\right)\right] = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{-1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{4\cos^2\alpha}\right]$$

$$= \frac{2\cos\alpha}{\sin^3\alpha} + \frac{\sin\alpha}{2\cos^3\alpha}$$

$\rightarrow$ Pour α dans le premier quadrant du cercle trigonométrique, sin et cos sont positifs, et on a donc :

$$\frac{d^2S(\alpha)}{d\alpha^2} > 0 \text{ pour } \alpha = 63° \Rightarrow \text{C'est bien un minimum !}$$

17 Septembre 08