Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 26

EXTRI260-EXTRI269

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Novembre 08

EXTRI260 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 08

Démontrer que $\sin 70° \cos °50 + \sin 260° \cos 280° = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Rappel : $\sin a \cos b = \frac{1}{2} \sin \frac{a+b}{2} + \sin \frac{a-b}{2}$

Donc : $\sin 70° \cos 50° + \sin 260° \cos 280°$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin \frac{70+50}{2} + \sin \frac{70-50}{2} + \sin \frac{260+280}{2} + \sin \frac{260-280}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin 60 + \cancel{\sin 10} + \underbrace{\sin 270}_{=0} - \cancel{\sin 10}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Le 3 novembre 08

EXTRI261 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 08

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 4x + \sin 6x + \cos 8x = \cos 2x$

$$\sin 4x + \sin 6x + \cos 8x = \cos 2x \to \sin 4x + \sin 6x = \cos 2x - \cos 8x$$
$$\xrightarrow{\text{Simpson}} \cancel{2}\sin 5x \cos(-x) = -\cancel{2}\sin 5x \sin(-3x)$$

1) $\sin 5x = 0 \to x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{k\pi}{5}$

2) Il reste : $\cos x = \sin 3x \to \sin 3x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$$\to \begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{2} - x + 2k\pi \to 4x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \to x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \\ 3x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + x + 2k\pi \to 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \to x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

EXTRI262 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 08

Démontrer que $\dfrac{1}{\sin 10°} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = 4$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin 10} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10} = 4 \\
&\Leftrightarrow \cos 10 - \sqrt{3}\sin 10 = 4\sin 10\cos 10 \\
&\Leftrightarrow \cos 10 - \tan 60\sin 10 = 2\sin 20 \\
&\Leftrightarrow \cos 10\cos 60 - \sin 60\sin 10 = 2\sin 20\cos 60 \\
&\Leftrightarrow \cos\left(10+60\right) = 2\sin 20\cos 60 \\
&\Leftrightarrow \cos 70 = 2\sin 20\cos 60 \\
&\Leftrightarrow \sin 20 = 2\sin 20\cos 60 \\
&\Leftrightarrow 1 = 2\cos 60 \\
&\Leftrightarrow 1 = 2\times\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow 1 = 1 \quad \text{OK}
\end{aligned}$$

Le 26 août 08. Modifié le 24 janvier 2010 (Carine Demesmaeker)

EXTRI263 – FACSA, ULG, Liège, septembre 08

Montrer que, dans un triangle *ABC*, on a toujours

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$$

$C = \pi - (A+B) \rightarrow \sin C = \sin(A+B)$ et $\cos C = -\cos(A+B)$

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sin 2A + \sin 2B}_{Simpson} + \sin 2C &= 2\underbrace{\sin(A+B)}_{=\sin C}\cos(A-B) + 2\sin C \underbrace{\cos C}_{=-\cos(A+B)} \\
&= 2\sin C\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right] \\
&= 2\sin C\left[\cancel{\cos A \cos B} + \sin A \sin B - \cancel{\cos A \cos B} + \sin A \sin B\right] \\
&= 4\sin A \sin B \sin C
\end{aligned}$$

---

21 décembre 08

EXTRI264 – FACSA, ULG, Liège, septembre 08

Un pentagone convexe irrégulier *ABCDE* est inscrit dans une circonférence de rayon 5 cm (voir figure 8).

- Quel est le périmètre du pentagone *ABCDE* ?
- Quelle est la surface du pentagone *ABCDE* ?

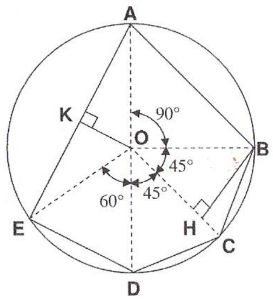


FIG. 8 Pentagone convexe irrégulier ABCDE

---

1) Périmètre

$AB = 5\sqrt{2}$ Diagonale d'un carré

$BC = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2\times 5^2 \cos 45} = 5\sqrt{2-\sqrt{2}}$ Formule des cosinus

$CD = BC$

$DE = 5$ Côté d'un hexagone

$EA = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2\times 5^2 \cos 120} = 5\sqrt{2+\sqrt{3}}$ Formule des cosinus

$$\begin{aligned}\rightarrow p &= AB + BC + CD + DE + EA\\ &= 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2-\sqrt{2}} + 5\sqrt{2-\sqrt{2}} + 5 + 5\sqrt{2+\sqrt{3}}\\ &= 5\left(1+\sqrt{2}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) \simeq 51.83 \text{ cm}\end{aligned}$$

2) Surface

$S_{AOB} = \dfrac{5^2}{2}$ Demi-carré

$S_{BCDO} = 2S_{BOC} = 2\times\dfrac{1}{2}\times|OB|\times|OC| = 2\times\dfrac{1}{2}\times 5^2\times\sin 45 = \dfrac{5^2\sqrt{2}}{2}$ Formule du sinus

$S_{DOE} = \dfrac{1}{2}\times 5^2\times\sin 60 = \dfrac{5^2\sqrt{3}}{4}$ Formule du sinus

$S_{EOA} = \dfrac{1}{2}\times 5^2\times\sin 120 = \dfrac{5^2\sqrt{3}}{4}$ Formule du sinus

$$\begin{aligned}S_{ABCDE} &= S_{AOB} + 2S_{BOC} + S_{DOE} + S_{EOA}\\ &= \frac{5^2}{2} + \frac{5^2\sqrt{2}}{2} + 2\times\frac{5^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5^2}{2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \simeq 10.37 \ \text{cm}^2\end{aligned}$$

---

21 décembre 08

EXTRI265 – FACSA, ULG, Liège, septembre 08

On désire calculer EXACTEMENT $\left(\text{sans calculatrice}\right)$ $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

A cette fin, on procédera comme suit.

a) Montrer que chacun de ces deux angles vérifient l'équation

$$\cos 3\theta = \cos 2\theta \qquad (2)$$

b) Chercher l'ensemble des solutions de l'équation (2) vérifiant $0 \leq \theta < \pi$

Parmi celles-ci, il en est une, que nous noterons θ_1, dont le cosinus est connu de manière évidente.

c) Exprimer l'équation (2) en termes de $\cos\theta$. On obtient une équation du troisième dégré.

d) En divisant cette équation par le binôme $\left(\cos\theta - \cos\theta_1\right)$, on peut se ramener à une équation du second degré, dont on calculera les racines $\cos\theta_2$ et $\cos\theta_3$.

e) Déterminer, parmi ces deux racines, laquelle correspond à $\frac{2\pi}{5}$ et laquelle correspond à $\frac{4\pi}{5}$. Justifier ce choix.

a) $\begin{cases} \cos\left(3\times\dfrac{2\pi}{5}\right)=\cos\dfrac{6\pi}{5}=-\cos\dfrac{\pi}{5} & \dfrac{6\pi}{5} \text{ et } \dfrac{\pi}{5} \text{ sont antisupplémentaires} \\ \cos\left(2\times\dfrac{2\pi}{5}\right)=\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\cos\dfrac{\pi}{5} & \dfrac{4\pi}{5} \text{ et } \dfrac{\pi}{5} \text{ sont supplémentaires} \end{cases}$

$\begin{cases} \cos\left(3\times\dfrac{4\pi}{5}\right)=\cos\dfrac{12\pi}{5}=\cos\dfrac{2\pi}{5} & \dfrac{12\pi}{5} \text{ et } \dfrac{\pi}{5} \text{ sont égaux à } 2\pi \text{ près} \\ \cos\left(2\times\dfrac{4\pi}{5}\right)=\cos\dfrac{8\pi}{5}=\cos\dfrac{2\pi}{5} & \dfrac{8\pi}{5} \text{ et } \dfrac{2\pi}{5} \text{ sont opposés} \end{cases}$

b) $\cos 3\theta-\cos 2\theta=0 \xrightarrow{Simpson} -2\sin\dfrac{5\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}=0$

i) $\sin\dfrac{\theta}{2}=0\rightarrow\theta_1=0°$

ii) $\sin\dfrac{5\theta}{2}=0\rightarrow\dfrac{5\theta}{2}=k\pi\rightarrow\theta=\dfrac{2k\pi}{2}\rightarrow\begin{cases}\theta_2=\dfrac{2\pi}{5}\\ \theta_3=\dfrac{4\pi}{5}\end{cases}$

c) Exprimons $\cos 2\theta$ et $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta=\left(2\cos^2\theta-1\right)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta$

$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\left(1-\cos^2\theta\right)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\rightarrow P(\cos\theta)=\cos 3\theta-\cos 2\theta\rightarrow P(\cos\theta)=4\cos^3\theta-2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$

d) Cette équation est divisible par $(\cos\theta-\cos\theta_1)=(\cos\theta-1)$

Horner : $\begin{array}{c|cccc} & 4 & -2 & -3 & 1\\ 1 & & 4 & 2 & -1\\ \hline & 4 & 2 & -1 & 0\end{array}\rightarrow P(\cos\theta)=(\cos\theta-1)\left(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1\right)$

e) Le deuxième facteur a pour racines : $\begin{cases}\cos\theta_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\simeq 0.309>0\rightarrow\cos\theta_2=\cos\dfrac{2\pi}{5}\\ \cos\theta_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\simeq 0.809<0\rightarrow\cos\theta_3=\cos\dfrac{4\pi}{5}\end{cases}$

EXTRI266 – FPMS, Mons, juillet 09

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos 4x - 4\cos 2x - 6\sin^2 x + 3 = 0$$

Résolution proposée par Fabienne ZOETARD

$$\cos 4x - 4\cos 2x - 6\sin^2 x + 3 = 0$$

$$2\left(2\cos^2 - 1\right)^2 - 1 - 4\left(2\cos^2 x - 1\right) - 6\left(1 - \cos^2 x\right) + 3 = 0$$

$$8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 2 - 1 - 8\cos^2 x + 4 - 6 + 6\cos^2 x + 3 = 0$$

$$8\cos^2 x - 10\cos^2 x + 2 = 0$$

$$4\cos^4 x - 5\cos^2 x + 1 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 \rightarrow \cos^2 x = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$1)\ \cos^2 x = 1 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \rightarrow x = k\pi$$

$$2)\ \cos^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Solutions principales : $\boxed{\left\{ 0,\ \pi,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3} \right\}}$

Le 2 juillet 2009

EXTRI267 – FPMS, Mons, juillet 09

Démontrer lidentité suivante, sans utiliser votre calculatrice.

$$\sin 78° - \sin 18° + \cos 132° = 0$$

Résolution proposée par Fabienne ZOETARD

$$\begin{aligned}
&\sin 78° - \sin 18° + \cos 132° \\
&\qquad = 2\sin 30° \cos 48° + \cos\left(180° - 48°\right) \\
&\qquad = 2\sin 30° \cos 48° - \cos 48° \\
&\qquad = \cos 48°\left(2\sin 30° - 1\right) \\
&\qquad = \cos 48°(1-1) \\
&\qquad = 0
\end{aligned}$$

Le 2 juillet 2009

EXTRI268 – FPMS, Mons, juillet 09

Démontrer que si, danc un triangle *ABC*, la relation

$$a.\cos B = 2b.\sin^2 \frac{A}{2}$$

est vérifiée, alors le triangle est isocèle.

Résolution proposée par Fabienne ZOETARD

$$a\cos B = 2b\sin^2 \frac{A}{2}$$

$$\rightarrow a\cos B = b(1-\cos A)$$

$$\text{or } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\rightarrow a\cos B = \frac{a\sin B}{\sin A}(1-\cos A)$$

$$\rightarrow \sin A\cos B = \sin B - \sin B\cos A$$

$$\rightarrow \sin(A+B) = \sin B$$

1er cas : $A+B = B+2k\pi \rightarrow A = 2k\pi$ A rejeter

2ème cas : $A+B = \pi - B + 2k\pi$

$2B = \pi - A + 2k\pi \rightarrow 2 > B = \pi - A$

or $A+B+C = \pi \rightarrow C = \pi - A - B \rightarrow C = B$

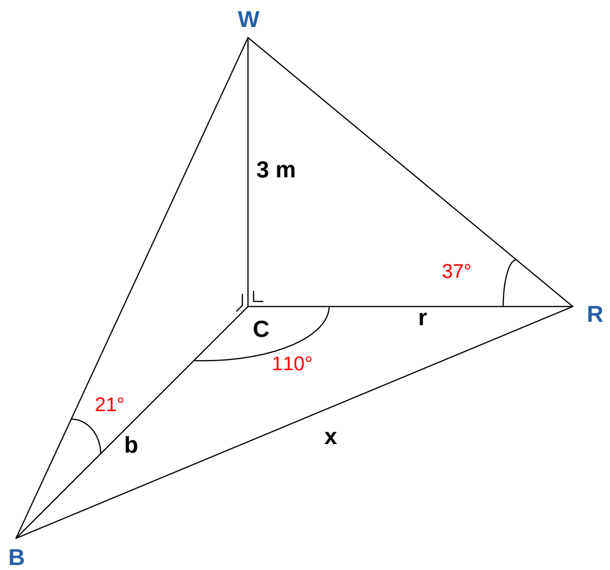
le triangle est donc isocèle de sommet principal A

Le 2 juillet 2009

EXTRI269 – FPMS, Mons, juillet 09

Une webcam est placée à une hauteur *h* de 3 m par rapport à un plan horizontal de référence.
Cette caméra observe, dans un plan *A* vertical, une balle rouge (posée sur la plan de référence) sous un angle de 37° par rapport à l'horizontale.
Elle observe également, dans un plan *B* vertical, une balle bleue (posée sur le plan de référence sous un angle de 21° par rapport à l'horizontale.
Calculer la distance entre les deux balles si l'angle formé par les plans verticaux *A* et *B* est de 110°.

Résolution proposée par Fabienne ZOETARD



Le plan WCR est perpendiculaire au plan BCR

Le plan WCB est perpendiculaire au plan BCR

$WBCR$ est un tétraèdre tel que WC est perpendiculaire au plan BCR

Dans le triangle rectangle $WBC : 3 = \tan 21°$

Dans le triangle rectangle $WRC : 3 = r \tan 37°$

Dans le triangle rectangle $BRC : x^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos 110°$

$$= \frac{9}{\tan^2 21°} + \frac{9}{\tan^2 37°} - 2.\frac{3}{\tan 21°}.\frac{3}{\tan 37°}.\cos 110°$$

$$\cong 98.21$$

$$\rightarrow \boxed{x = 9.91\, m}$$

Le 2 juillet 2009