Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 28

EXTRI280-EXTRI289

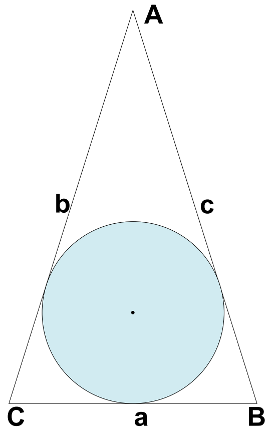
http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Septembre 09

EXTRI280 – EPL, UCL, Louvain, septembre 09

Etant donné un triangle isocèle ABC avec base $a = 2$ mètres et l'angle A connu, on y insère un cercle de rayon R maximal comme ci-dessous



1) Donnez le rayon R du cercle inscrit en fonction de l'angle A. Calculez ce rayon à 0.1 m près, pour $A = 35°$.

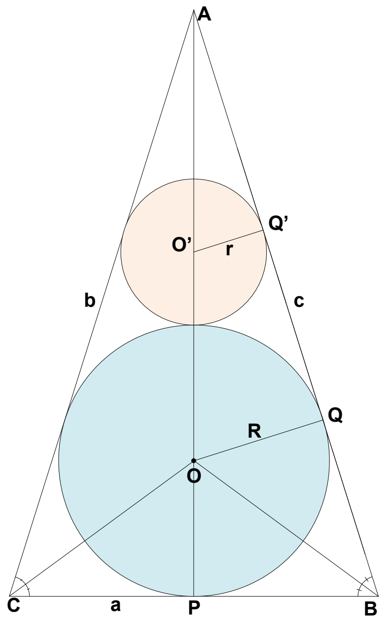
On place ensuite un deuxième cercle de rayon r maximal au-dessus du premier. Indiquez-le sur le croquis.

2) Donnez le rayon r du cercle inscrit en fonction de A. Calculez ce rayon à 0.1 m près, pour $A = 25°$

3) Donnez le rapport des surfaces des deux cercles en fonction du demi angle $\frac{A}{2}$.

Pour quelle valeur de $\frac{A}{2}$ la surface du grand cercle est -elle le double de la surface du petit cercle? Calculer cet angle $\frac{A}{2}$ à 0.1° près.

Indiquez les paramètres intermèdiaires utilisé sur votre croquis.



1) Le centre O du cercle inscrit au triangle ABC est déterminé par les bissetrices des angles B et C. De O abaissons les perpendiculaires sur AB et CB. Ce qui détermine quoi les points Q et P.

$$\Delta \text{ rectangle } OPB \rightarrow \| AP \| = \frac{\| PB \|}{\tan \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{\widehat{A}}{2}} \quad (\text{Car } \| PB \| = \frac{\| CB \|}{2} = \frac{2}{2} = 1)$$

$$\Delta \text{ rectangle } AOQ \rightarrow \| AO \| = \frac{\| OQ \|}{\sin \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{R}{\sin \frac{\widehat{A}}{2}}$$

$$\text{or } R = \| AP \| - \| AO \| = \| AP \| - \| OQ \| = \frac{1}{\tan \frac{\widehat{A}}{2}} - \frac{R}{\sin \frac{\widehat{A}}{2}}$$

$$\rightarrow R \frac{1 + \sin \frac{\widehat{A}}{2}}{\sin \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{\cos \frac{\widehat{A}}{2}}{\sin \frac{\widehat{A}}{2}} \rightarrow \boxed{R = \frac{\cos \frac{\widehat{A}}{2}}{1 + \sin \frac{\widehat{A}}{2}}}$$

Si $\widehat{A} = 35° \rightarrow \boxed{R = 0.73\, m}$

2) $\| AO' \| + \| OO' \| + \| OP \| = \| OP \| \to \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} + r + 2R = \frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$

$$\to r\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{A}{2}} - 2R \to r\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} - 2\frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}$$

$$\to r\frac{1+\sin\frac{A}{2}}{\cancel{\sin\frac{A}{2}}} = \frac{\cos\widehat{\frac{A}{2}}.\left(1+\sin\widehat{\frac{A}{2}}\right) - 2\cos\widehat{\frac{A}{2}}\sin\widehat{\frac{A}{2}}}{\cancel{\sin\widehat{\frac{A}{2}}}\left(1+\sin\widehat{\frac{A}{2}}\right)}$$

$$\to r = \frac{\cos\widehat{\frac{A}{2}} - \cos\widehat{\frac{A}{2}}\sin\widehat{\frac{A}{2}}}{\left(1+\sin\widehat{\frac{A}{2}}\right)^2} \to \boxed{r = \frac{\cos\widehat{\frac{A}{2}}\left(1-\sin\widehat{\frac{A}{2}}\right)}{\left(1+\sin\widehat{\frac{A}{2}}\right)^2}}$$

3) Il faut donc : $\pi R^2 = 2\pi r^2 \to R = \sqrt{2}.r \to \frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}} = \sqrt{2}\frac{\cos\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)}{\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)^2}$

$CE: 1+\sin\frac{A}{2} \neq 0 \to \sin\frac{A}{2} = -1 \to \frac{A}{2} = 270° \to A = 540°$ Ce qui n'est pas envisageable

Eliminons le cas : $\cos\frac{A}{2} = 0 \to \frac{A}{2} = 90° \to A = 180°$ = un triangle plat.

L'équation se simplifie alors :

$$1+\sin\widehat{\frac{A}{2}} = \sqrt{2}\left(1-\sin\widehat{\frac{A}{2}}\right) \to \sin\widehat{\frac{A}{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \to \widehat{\frac{A}{2}} = 9.87° \to \boxed{\widehat{A} = 19.76°}$$

Le 3 aout 09

EXTRI281 – FACSA, ULG, Liège, septembre 09

Montrer que dans un triangle quelconque ABC, on a toujours

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.ingveh.ulg.ac.be/fr/Examen_Admission/TrigoSolSept2009.pdf

Multiplions cette relation par $\sin A \sin B \sin C$. Il vient

$$\cos A \cos B \sin C + \cos B \cos C \sin A + \cos C \cos A \sin B = \sin A \sin B \sin C$$

$$\sin A \left(\cos B \cos C - \sin B \sin C\right) + \cos A \left(\sin B \cos C + \sin C \cos B\right) = 0$$

$$\sin A \cos\left(B + C\right) + \cos A \sin\left(B + C\right) = 0$$

$$\sin\left(A + B + C\right) = 0$$

Evident puisque $A + B + C = \pi$

---

20 octobre 2009

EXTRI282 – EPL, UCL, Louvain, septembre 10.

- Déterminez les valeurs des paramètres a, b et c telles que l'équation

$$f(x) = (a + b.\sin x)^2 \sin x + c.\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

soit égale à

$$g(x) = \sin x - 0.5\sin 3x$$

- Donnez les racines de $g(x)$ et les valeurs de x pour lesquelles $g(x) \geq 0$ dans l'intervalle $[\,0, 2\pi\,]$

Solution proposée par Nicole BERCKMANS

1) $(a + b.\sin x)^2 \sin x + c.\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 3x$

On développe en $\sin x$, on obtient :

$$\left(b^2 - 2\right)\sin^3 x + 2ab\sin^2 x + \left(a - c + \frac{1}{2}\right).\sin x = 0$$

D'où : $b = \pm\sqrt{2}, a = 0, c = \frac{1}{2}.$

On aurait pu ausi poser : $x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \ldots.$

2) $g(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 3x \geq 0 \rightarrow 2g(x) = 2\sin x - 3\sin x + 4\sin^3 x \geq 0$

$\rightarrow 2g(x) = \sin x\left(4\sin^2 x - 1\right) \geq 0$

On construit le tableau de signe :

x	0		$\pi/6$		$5\pi/6$		π		$7\pi/6$		$11\pi/6$		2π
$\sin x$	0	+	+	+	+	+	0	–	–	–	–	–	0
$4\sin^2 - 1$	–	–	0	+	0	–	–	–	0	+	0	–	–
$2g(x)$	0	–	0	+	0	–	0	+	0	–	0	+	0

Les racines de $g(x)$ sont $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \notin \mathbb{Z}\right\}$

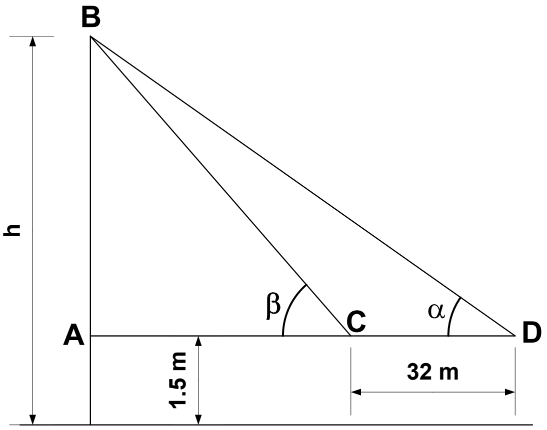
$g(x) \geq$ sur $[\,0, 2\pi\,]$ si

$$x \in \{0\} \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\pi, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$$

Le 7 septembre 2010

EXTRI283 – FACSA, ULG, Liège, septembre 09.

Soit une tour h dont le pied est inaccessible, mais dans le même plan horizontal que les pieds d'un observateur. L'oeil de ce dernier se trouve à 1.5 m du sol.
A une distance AD de la tour, l'observateur en voit le sommet sous un angle $\alpha = 24°36'$ par rapport à l'horizontale. Aprsè s'être rapproché de 32 m de la tour, l'observateur la voit sous un angle $\beta = 40°12'$ par rapport à l'horizontale. Quelle est la hauteur de la tour?



Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.ingveh.ulg.ac.be/fr/Examen_Admission/TrigoSolSept2009.pdf

Solution 1

Soit A le point de la tour situé à 1.50 m du sol, et soit B son sommet. Soit D le premier point d'observation, et soit C le second. On a évidemment :

$$AB = BC \sin\beta$$

Dans le triangle BCD, l'angle $\gamma = \widehat{CBD}$ vérifie

$$\gamma = \beta - \alpha = 15°36'$$

La relation des sinus donne :

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{CD}{\sin\gamma} \text{ soit } BC = CD\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

Il vient donc

$$AB = CD\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma} = 31.9768 \text{ m}$$

Et la hauteur de la tour est

$$\boxed{h = 1.5 \text{ m} + 31.9768 \text{ m} = 33.4728 \text{ m}}$$

Solution 2

On considère les triangles rectangles ACB et ADB et on trouve :

$$AB = AC \tan \beta$$

et

$$AB = AD \tan \alpha = (AC + 32) \tan \alpha$$

En égalant la valeur de AB, on déduit la valeur de AC puisque tous les autres paramètres sont connus :

$$AB = AC \tan \beta = (AC + 32) \tan \alpha$$

$$\rightarrow AC = \frac{32 \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} \rightarrow AC = 37.8347 \text{ m}$$

Il vient

$$AB = (AC + 32) \tan \alpha = 31.9728 \text{ m}$$

$$\boxed{h = AB + 1.5 = 33.4728 \text{ m}}$$

Le 25 octobre 09

EXTRI284 – Polytech, UMONS, Mons – Septembre 2005

Démontrer que la relation suivante est vérifiée:

$$1-\sin x+\cos x=2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

$$1-\sin x+\cos x=2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

Or $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ et $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

Donc $1-\sin x+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$=2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$$

Pour que l'identité de départ soit vérifiée, il suffit maintenant de montrer que :

$$\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

En effet : $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}$$

EXTRI285 – Polytech, UMONS, Mons – Septembre 2005

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$2\cos x\sin 2x+\sin 3x=3\sin 2x$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$2\cos x\sin 2x+\underbrace{\sin 3x}_{\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x}=3\sin 2x \rightarrow 3\cos x\underbrace{\sin 2x}_{2\sin x\cos x}+\underbrace{\cos 2x}_{2\cos^2 x-1}\sin x=3\underbrace{\sin 2x}_{2\sin x\cos x}$$

$$\rightarrow \sin x\left(6\cos^2 x+2\cos^2 x-1-6\cos x\right)=0 \rightarrow \sin x\left(8\cos^2 x-6\cos x-1\right)=0$$

1er cas : $\sin x=0 \;\rightarrow\; x=k180°$

2ème cas : $8\cos^2 x-6\cos x-1=0 \rightarrow \cos x=\dfrac{6\pm\sqrt{36+32}}{16}=\dfrac{6\pm 2\sqrt{17}}{16}$

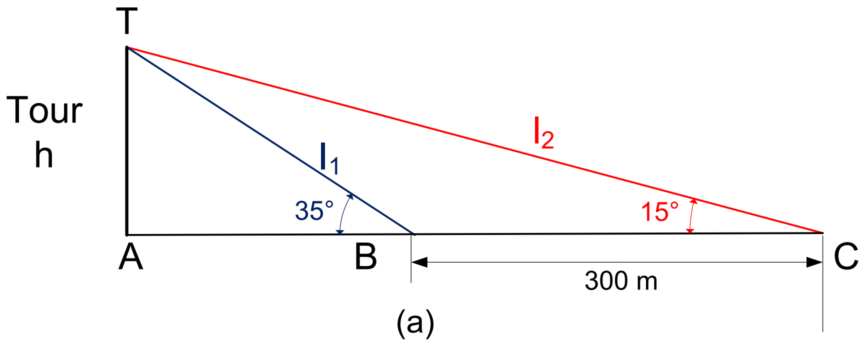
- $\cos x=\dfrac{6+2\sqrt{17}}{16}=0.89 \;\rightarrow x=\pm 27.1°+k.360°$
- $\cos x=\dfrac{6-2\sqrt{17}}{16}=-0.14 \rightarrow x=\pm 98.1°+k.360°$

Le 26 décembre 09

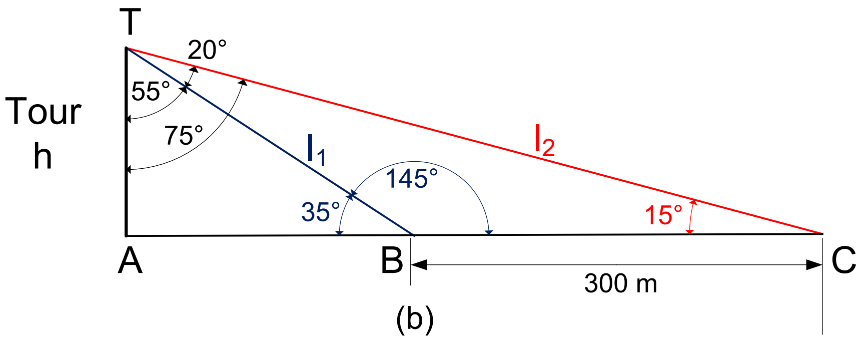
EXTRI286 – Polytech, UMONS, Mons – Septembre 2005

Un système motorisé se déplace, au ras du sol, en direction d'une tour de hauteur inconnue. A une certaine distance de la tour, il voit le sommet de celle-ci sous un angle de 15° par rapport à l'horizontale. Après avoir parcouru 300 m. Il voit le sommet de la tour sous un angle de 35° par rapport à l'horizontale. Déterminer la hauteur de la tour ainsi que les distances entre le système et le sommet de la tour aux deux points de mesure.

Appelons h, la hauteur de la tour et l_1, l_2, les distances entre le système et le sommet de celle-ci aux deux points de mesure. La somme des angles d'un triangle valant 180°, il est possible au départ des données du problème (Fig a) , de déduire les valeurs des différents angles (Fig b).



(a)



(b)

Dans le triangle TBC, on peut écrire : $\dfrac{l_1}{\sin 15°} = \dfrac{300}{\sin 20°} \rightarrow l_1 = 300\dfrac{\sin 15°}{\sin 20°} = 227.02$ m.

Dans le triangle TAB, on a : $h = l_1 \cos 55° = 130,21$ m.

Le 26 décembre 09

EXTRI287 – FACSA, ULB, Bruxelles – septembre 2009

Démontrer que $\sin 20°\sin 40°\sin 60°\sin 80° = \frac{3}{16}$

Solution proposée par Steve Tumson

$$\sin(20°)\sin(40°)\sin(60°)\sin(80°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(20°)\sin(40°)\sin(80°)$$

$$\begin{cases} \sin(80°) = \cos(10°) \\ \sin(20°)\sin(40°) = \frac{1}{2}\left(\cos(20°) - \cos(60°)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(20°) - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(20°)\sin(40°)\sin(80°) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\cos(20°) - \frac{1}{2}\right)\cos(10°)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left(2\cos(20°)\cos(10°) - \cos(10°)\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\cos(30°) + \cos(10°) - \cos(10°)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\cos(30°) = \frac{3}{16}$$

Mai 2009

EXTRI288 – FACSA, ULB, Bruxelles – septembre 2009

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x = \sin x + 3\cos x$$

Solution proposée par Steve Tumson

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x + 3\cos^2 x = \sin x + 3\cos x \\
&\qquad \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\cos^2 x = \sin x + 3\cos x \\
&\qquad \Leftrightarrow 1 + 2\cos^2 x = \sin x + 3\cos x
\end{aligned}$$

Le coefficient 3 devant le cosinus empêche pas mal de possibilités de transformation de cette équation. Il est aussi difficile de ne ramener l'équation qu'en termes uniquement composés de sinus ou de cosinus.

Pour travailler avec une base commune, on choisit de travailler en base $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

<u>Condition</u> : $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 1 + 2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = \frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} \\
&\Leftrightarrow \left(1+t^2\right)^2 + 2\left(1-t^2\right)^2 - 2t\left(1+t^2\right) - 3\left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 3t^4 - t^3 - t^2 - t = 0 \\
&\Leftrightarrow t\left(t-1\right)\underbrace{\left(3t^2 + 2t + 1\right)}_{>0} = 0
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = 2k\pi \qquad \forall k \in \mathbb{Z}} \\ t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \forall k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$$

EXTRI289 – Polytechnique, ERM, Bruxelles, Juillet 2010

Déterminer les angles d'un triangle ABC sachant que $A = 3\ B$ et que $\overline{BC} = 2\ \overline{AC}$.

Solution proposée par Benoit Baudelet

En utilisant les notations classiques, on a grâce à la règle des sinus

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \cancel{\frac{c}{\sin\gamma}} \Rightarrow \frac{2b}{\sin 3\beta} = \frac{b}{\sin\beta} \Leftrightarrow \sin 3\beta = 2\sin\beta \qquad (1).$$

Or, on sait que $\sin 3\beta = 3\sin\beta - 4\sin^3\beta$, donc en combinant avec l'équation (1), on obtient $4\sin^3\beta = \sin\beta \Leftrightarrow \sin\beta\left(2\sin\beta - 1\right).\left(2\sin\beta + 1\right) = 0.$

(a) Si $\sin\beta = 0$, alors $\beta = \frac{\pi}{2}$, ce qui n'a pas de sens car alors on aurait $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

(b) Si $\sin\beta = \frac{-1}{2}$, alors $\beta = \frac{-\pi}{6}$ ou $\beta = \frac{7\pi}{6}$, ce qui n'a pas de sens dans un triangle.

(c) Si $\sin\beta = \frac{1}{2}$, alors $\beta = \frac{\pi}{6}$ (ou $\beta = \frac{5\pi}{6}$ ce qui n'a pas de sens car alors on aurait $\alpha = \frac{5\pi}{2}$).

La seule solution intéressante est alors $\boxed{\beta = \frac{\pi}{6}}$ et donc $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{\gamma = \frac{\pi}{3}}$.