

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 29

EXTRI290-EXTRI299

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot
Benoit Baudalet – Steve Tumson

Juillet 2010

EXTRI290 – FACSA, ULG, Liège, Juillet 10.

Montrer que l'on a

$$4(\cos^6 a - \sin^6 a) = \cos 2a(4 - \sin^2 2a)$$

$$\begin{aligned}4(\cos^6 a - \sin^6 a) &= 4(\cos^2 a - \sin^2 a)(\cos^4 a + \cos^2 a \sin^2 a + \sin^4 a) \\ &= 4 \cos 2a \left((\cos^2 a + \sin^2 a)^2 - \cos^2 a \sin^2 a \right) \\ &= 4 \cos 2a \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2a \right) \\ &= \cos 2a(4 - \sin^2 2a)\end{aligned}$$

Le 13 juillet 2010 (Relu Benoit Baudelet)

EXTRI291 – ERM, 2005, série 1.

Résoudre l'équation

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 2\sin^2 x \cos^2 x + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 2\sin^2 x \cos^2 x + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(a) \sin 2x = +\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi & \rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi & \rightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}$$

$$(b) \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi & \rightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ 2x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi & \rightarrow x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}$$

Conclusion : $x \in \left\{ \pm \frac{\pi}{8} + k\pi, \pm \frac{3\pi}{8} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

21 avril 2011

EXTRI292 – FACSA, ULG, Liège, Juillet 10.

Calculer l'angle A d'un triangle non dégénéré, sachant que les côtés adjacents b et c sont de même longueur et que l'aire du triangle vaut 3 fois celle du cercle dont le troisième côté a est le diamètre. Exprimer le résultat en degrés, minutes, secondes.

$$\text{Aire du triangle : } A_T = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}b^2 \sin A$$

$$\text{Aire du cercle : } A_C = \frac{\pi a^2}{4}$$

$$\text{On doit avoir : } A_T = 3A_C \rightarrow \frac{1}{2}b^2 \sin A = \frac{3\pi a^2}{4}$$

$$\text{Or : } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 2b^2(1 - \cos A)$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2}b^2 \sin A = \frac{3\pi}{4}2b^2(1 - \cos A) \rightarrow \sin A = 3\pi(1 - \cos A)$$

$$\rightarrow \sin A + 3\pi \cos A = 3\pi.$$

$$\text{On pose : } \tan \varphi = 3\pi \rightarrow \varphi = 83.94339 \rightarrow \cos \varphi = 0.105511$$

$$\rightarrow \sin(A + \varphi) = 3\pi \cos \varphi = 0.994418$$

$$\rightarrow \begin{cases} A + \varphi = 83.94339 \rightarrow A = 0 \text{ A rejeter (triangle dégénéré)} \\ A + \varphi = 180 - 83.94339 \rightarrow \boxed{A = 12.11322^\circ = 12^\circ 06' 47.59''} \end{cases}$$

Solution proposée par Robert Moulan

$$\text{Aire du triangle isocèle ABC (} b=c \text{ et } \hat{B}=\hat{C} \text{) : } A_t = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}b^2 \sin A$$

$$\text{Aire du cercle de diamètre BC=a : } A_c = \pi \frac{a^2}{4}$$

$$\text{Par hypothèse : } \frac{1}{2}b^2 \sin A = 3 \cdot \frac{\pi a^2}{4} \text{ d'où on tire facilement } \sin A = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \quad (1)$$

$$\text{De la relation des sinus dans un triangle, on tire : } \frac{a^2}{b^2} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} \text{ mais } A = 180^\circ - 2B$$

$$\sin A = \sin 2B = 2 \sin B \cos B$$

$$\sin^2 A = 4 \sin^2 B \cos^2 B$$

$$\text{Ainsi } \frac{a^2}{b^2} = \frac{4 \sin^2 B \cos^2 B}{\sin^2 B} = 4 \cos^2 B \text{ et l'équation (1) devient : } 2 \sin B \cos B = \frac{3\pi}{2} 4 \cos^2 B \rightarrow \tan B = 3\pi = 9,424778$$

$$B = 83^\circ 56' 36'' \rightarrow 2B = 167^\circ 53' 12'' \rightarrow \boxed{A = 180^\circ - 2B = 12^\circ 06' 48''}$$

Le 13 juillet 2010 (Relu Benoit Baudelet). S.

EXTRI293 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2010.
FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Calculer la valeur de l'expression (sans l'aide de la calculatrice)

$$E = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$$

$$\begin{aligned} & \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ \\ &= (\tan 9^\circ + \tan 81^\circ) - (\tan 27^\circ + \tan 63^\circ) \\ &= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} \quad \text{car } \tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \\ &= \frac{\cos 27^\circ \cos 63^\circ - \cos 9^\circ \cos 81^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ \cos 27^\circ \cos 63^\circ} \\ &= 2 \frac{\cos 36^\circ - \cos 90^\circ - \cos 72^\circ + \cos 90^\circ}{(\cos 90^\circ + \cos 72^\circ)(\cos 90^\circ + \cos 36^\circ)} \quad \text{car } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \\ &= 2 \frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\cos 72^\circ \cos 36^\circ} \\ &= -4 \frac{\sin 54^\circ \sin(-18^\circ)}{\cos 72^\circ \cos 36^\circ} \quad \text{car } \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ &= 4 \frac{\cos 36^\circ \cos 72^\circ}{\cos 72^\circ \cos 36^\circ} \quad \text{car } \begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \end{cases} \\ &= \boxed{4} \end{aligned}$$

Le 13 juillet 2010 (Relu Benoit Baudelet)

EXTRI294 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2010 série 1.

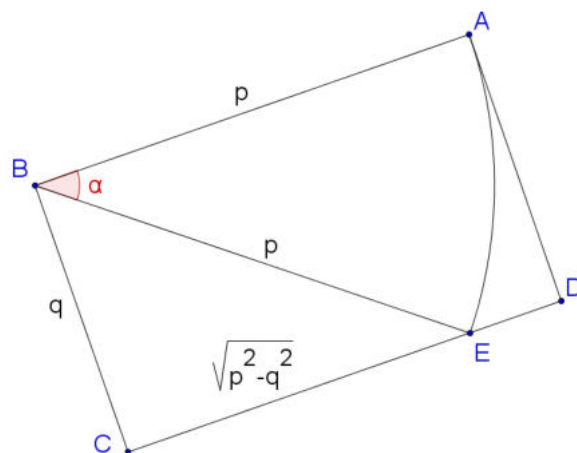
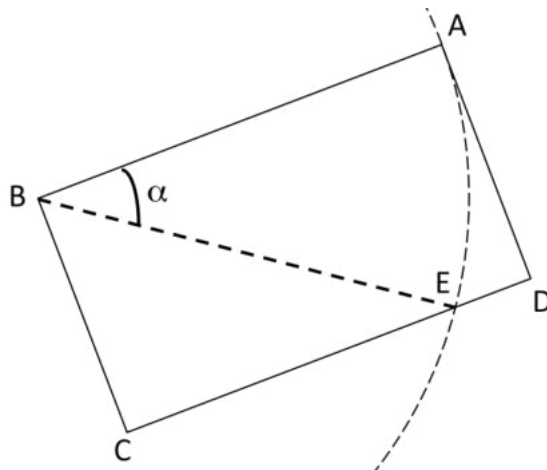
Une pièce mécanique rectangulaire $ABCD$ est usinée (c.-à-d. découpée) tangentiellement au côté AD en A , par une meule circulaire de centre B (voir le croquis ci-dessous).

- 1) Trouvez l'expression de la surface de la découpe (c.-à-d. formée par l'arc AE et les côtés AD et DE) en fonction de la longueur (p) et de la largeur (q) de la pièce $ABCD$.

Indiquez sur le croquis, les paramètres intermédiaires éventuellement utilisés.

- 2) Donnez l'angle α , la longueur CE et les surfaces ABE et BCE pour $p = 2$ dm et $q = \sqrt{2}$ dm.

- 3) Si on coupe ensuite la pièce selon BE et que l'on souhaite recycler la découpe BCE , quelle est l'expression de la surface maximale du rectangle que l'on peut y inscrire ? Développer le raisonnement mathématique (sans utiliser de valeurs numériques).



1) L'aire cherchée est donnée par : $A_{ADE} = A_{ABCD} - A_{BCE} - A_{ABE}$

$$A_{ABCD} = pq$$

$$A_{BCE} = \frac{1}{2} q \sqrt{p^2 - q^2}$$

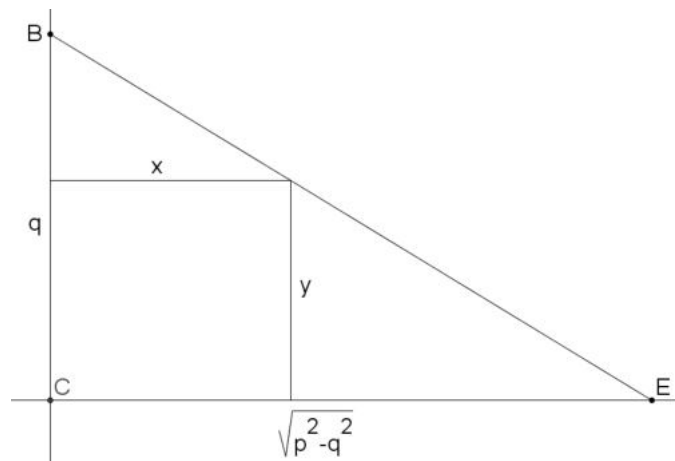
$$A_{ABE} = \frac{\alpha}{2} p^2 \quad (\alpha \text{ en radian}) \quad \text{or} \quad \sin \alpha = \frac{q}{p} \rightarrow \alpha = \sin^{-1} \frac{q}{p}$$

$$A_{ADE} = pq - \frac{1}{2} q \sqrt{p^2 - q^2} - \frac{1}{2} p^2 \sin^{-1} \frac{q}{p}$$

2) Si $p = 2 \text{ dm}$ et $q = \sqrt{2} \text{ dm} \rightarrow \alpha = \sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

$$A_{ABE} = \frac{\alpha}{2} p^2 = \frac{\pi}{8} 2^2 = \frac{\pi}{2} \text{ dm}^2$$

$$A_{BCE} = \frac{1}{2} q \sqrt{p^2 - q^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2^2 - 2} = 1 \text{ dm}^2$$



3) Dans un système d'axes défini par $Ox \equiv CE$ et $Oy \equiv CB$, la droite BE a pour équation

$$BE \equiv \frac{x}{\sqrt{p^2 - q^2}} + \frac{y}{q} = 1 \rightarrow BE \equiv y = q \left(1 - \frac{x}{\sqrt{p^2 - q^2}} \right)$$

L'aire du rectangle inscrit est : $A = xy = xq \left(1 - \frac{x}{\sqrt{p^2 - q^2}} \right) = qx - \frac{qx^2}{\sqrt{p^2 - q^2}}$

Cette aire sera maximale si la dérivée par rapport à x de son expression est nulle :

$$A' = q - \frac{2qx}{\sqrt{p^2 - q^2}} = 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{2} \rightarrow y = \frac{q}{2}$$

Autrement dit le rectangle a pour dimensions la moitié des côtés de l'angle droit.

EXTRI295 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2010 série 1.

L'équation en x suivante résulte du mélange de deux signaux de télécommunications qui sont eux-mêmes des fonctions trigonométriques :

$$f(x) = 2a(1 - \sin^2 x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin x - 3 \cdot \sin 2x$$

- Pour quelles valeurs de a , les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont-elles toutes réelles ?
- Si $a = 4$, pour quelles valeurs de x , l'équation donne-t-elle des valeurs positives dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$

$$1) f(x) = 2a(1 - \sin^2 x) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x - 3 \sin 2x = 2a \cos^2 x \cos x \sin x - 3 \sin 2x$$

$$= a \cos^2 x \sin 2x - 3 \sin 2x = \sin 2x (a \cos^2 x - 3)$$

$$\text{Soit donc : } \sin 2x (a \cos^2 x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \text{ donne toujours des racines réelles } (x \in \mathbb{R}) \\ a \cos^2 x - 3 = 0 \text{ donne des racines réelles si } a > 0 \end{cases}$$

2) L'inéquation à résoudre est :

$$\sin 2x (4 \cos^2 x - 3) > 0 \rightarrow \sin 2x (2 \cos x - \sqrt{3})(2 \cos x + \sqrt{3}) > 0$$

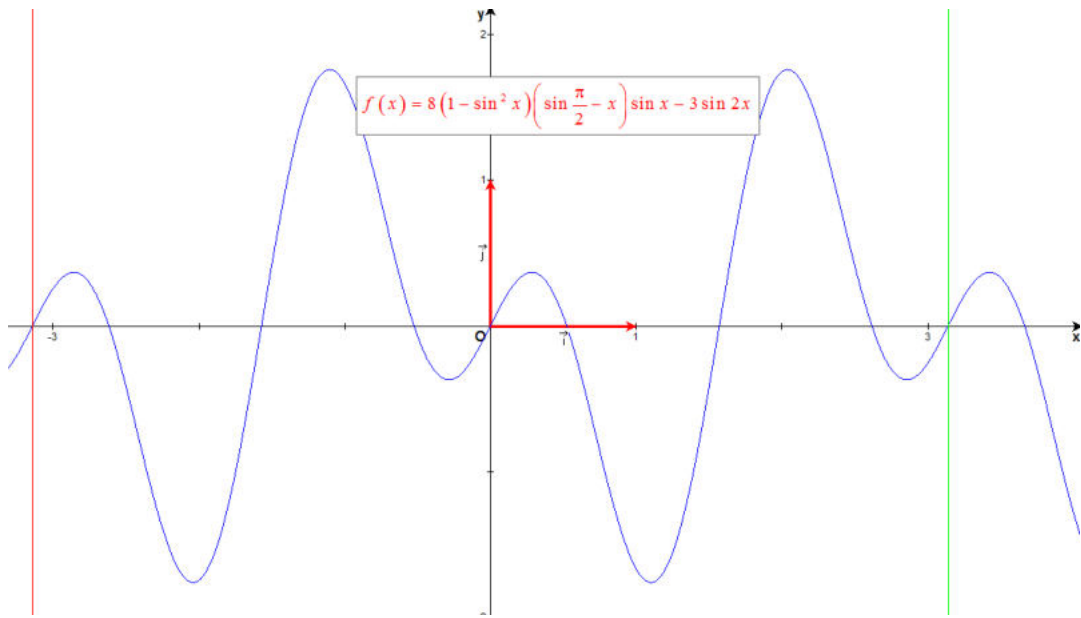
Cherchons les racines dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \rightarrow x = 0, x = -\frac{\pi}{2} \text{ et } x = \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} \\ 2 \cos x + \sqrt{3} = 0 \rightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Construisons un tableau de signes

	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π						
$\sin 2x$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$2 \cos x - \sqrt{3}$	-	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-
$2 \cos x + \sqrt{3}$	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	-
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-

Conclusion : $x \in \left] -\pi, -\frac{5\pi}{6} \right[\cup \left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} \right[\cup \left] 0, \frac{\pi}{6} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right[$



Le 20 juillet 2010

EXTRI296 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2010 série 1.

Pour les affirmations suivantes, cochez l'unique affirmation qui est vraie.

- Sous l'hypothèse que $a < b < c$, quelle condition supplémentaire faut-il pour assurer l'existence d'un triangle (non dégénéré) avec côtés a, b, c .

$$a < c - b \quad \square \quad b - a < c \quad \square \quad c < a + b \quad \square$$

- Dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, l'équation $\frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} = \frac{1}{2}$ possède exactement

$$1 \text{ solution} \quad \square \quad 2 \text{ solutions} \quad \square \quad 3 \text{ solutions} \quad \square$$

- L'expression $(2 \cos a + 1)(2 \cos a - 1)(2 \cos 2a - 1)$ est identiquement égale à

$$2 \cos 4a + 1 \quad \square \quad 2 \sin 4a + 1 \quad \square \quad \sin 2a \cos 2a + 1 \quad \square$$

- Si dans un triangle ABC rectangle en A , les côtés a, b et c opposés aux angles respectifs A, B et C satisfont $b = 2c$

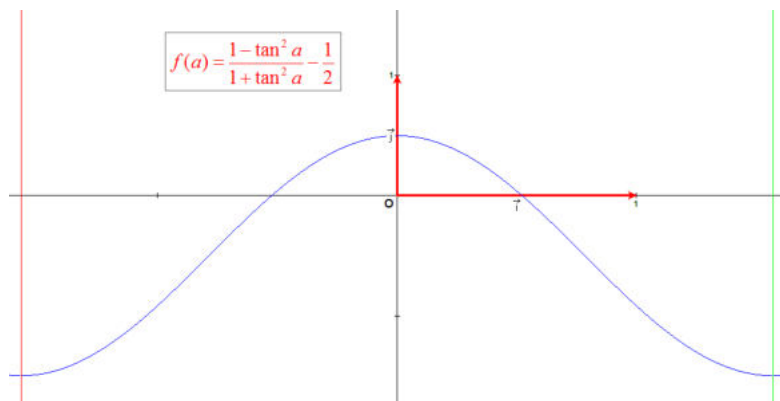
$$B < 30^\circ \quad \square \quad B = 30^\circ \quad \square \quad B > 30^\circ \quad \square$$

1) Proposition $c < a + b$ car un côté doit être plus petit que la somme des deux autres.

(Note : il s'agit de l'inégalité triangulaire).

$$2) \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \frac{2 - 2 \tan^2 a - 1 - \tan^2 a}{2(1 + \tan^2 a)} = 0$$

$$\rightarrow 1 - 3 \tan^2 a = 0 \rightarrow \tan^2 a = \frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} \tan a = \frac{\sqrt{3}}{3} & \rightarrow a = \frac{\pi}{6} \\ \tan a = -\frac{\sqrt{3}}{3} & \rightarrow a = -\frac{\pi}{6} \end{cases} \rightarrow \boxed{2 \text{ solutions}}$$



$$3) (2 \cos a + 1)(2 \cos a - 1)(2 \cos 2a - 1) = (4 \cos^2 a - 1)(2 \cos 2a - 1)$$

$$= (2 \cos 2a + 2 - 1)(2 \cos 2a - 1) = 4 \cos^2 2a - 1 = 2 \cos 4a + 2 - 1 = 2 \cos 4a + 1$$

$$3) \tan B = \frac{b}{c} = 2 \rightarrow B > 30^\circ$$

EXTRI297 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2010 série 1.

La coupe d'une montagne a un profil sinusoïdal et on décide d'y construire une voie ferrée comme indiqué dans le croquis ci-dessous :

1/ Trouvez des expressions pour les paramètres a, b, c, d qui correspondent avec le profil $y = f(x)$ du type :

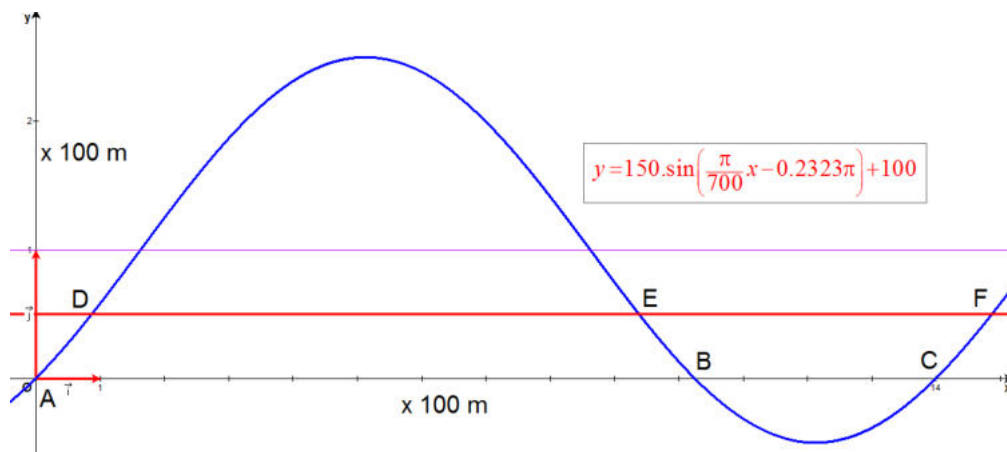
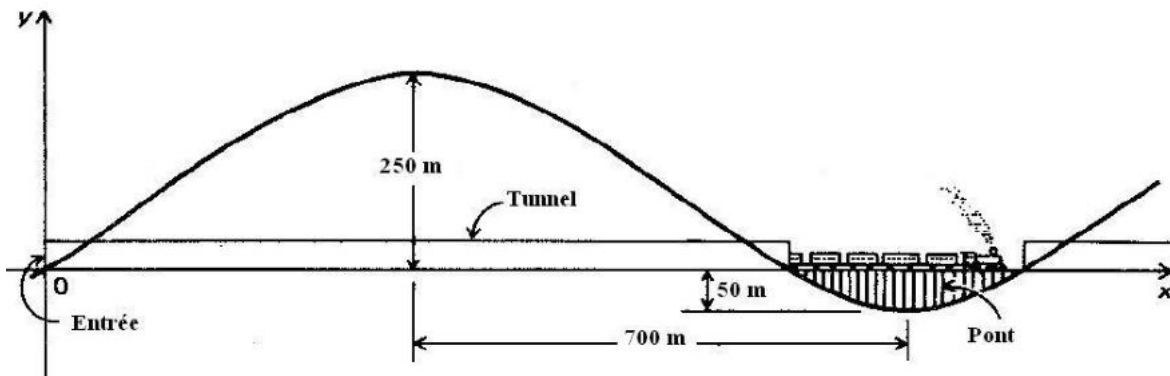
$$y = a \sin(bx + c) + d$$

et avec les mesures indiquées sur le croquis (expliquez votre raisonnement).

2/ Donnez une expression pour la longueur t_1 du tunnel et p_1 du pont (sur l'axe $y = 0$), en fonction des paramètres a, b, c, d . Calculez ensuite la valeur de t_1 et de p_1 à 1 mètre près.

3/ On décide alors de rehausser la trajectoire de la voie ferrée de 50 mètres.

Calculez la nouvelle valeur de t_2 du tunnel et p_2 du pont à 1 mètre près.



1) La sinusoïde a pour équation : $y = a \sin(bx + c) + d$

• a est égal à la moitié de la distance entre un minimum et un maximum soit

$$\rightarrow a = \frac{250 + 50}{2} = 150 \text{ m}$$

• b est déterminé en considérant que la distance entre 2 maximums est de 1400 m

$$\rightarrow b = \frac{2\pi}{1400} = \frac{\pi}{700} \text{ rad/m}$$

• d est déterminé par la position de l'axe de la sinusoïde $\rightarrow d = 100 \text{ m}$

• c est déterminé en imposant que la sinusoïde passe par l'origine A pour $x = 0$

$$0 = 150 \sin c + 100 \rightarrow \sin c = -\frac{100}{150} \rightarrow c = -0.2323\pi \text{ rad}$$

Finalement, la sinusoïde a pour équation :
$$y = 150 \sin\left(\frac{\pi}{700}x - 0.2323\pi\right) + 100$$

2) La longueur du tunnel t_1 (AB sur le schéma) est déterminée en considérant que $y = 0$ en $x = x_B$, autrement dit quand l'argument du sinus est l'angle supplémentaire de -0.2323π soit $\pi + 0.2323\pi = 1.2323\pi$

$$\rightarrow \frac{\pi}{700}x_B - 0.2323\pi = 1.2323\pi \rightarrow x_B = 1.2323 \times 700 = 1025 \rightarrow t_1 = 1025 \text{ m}$$

La longueur du pont est alors : $p_1 = 1400 - t_1 = 1400 - 1025 = 375 \rightarrow p_1 = 375 \text{ m}$

3) On remonte la ligne du chemin de fer de 50 m.

La longueur $t_2 = |DE| = x_E - x_D$

$$\rightarrow 150 \sin\left(\frac{\pi}{700}x - 0.2323\pi\right) + 100 = 50 \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{700}x - 0.2323\pi\right) = -\frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{700}x_D - 0.2323\pi = -0.108173\pi & \rightarrow x_D = 87 \text{ m} \\ \frac{\pi}{700}x_E - 0.2323\pi = \pi - 0.108173\pi & \rightarrow x_E = 938 \text{ m} \end{cases} \rightarrow t_2 = 938 - 87 = 851 \text{ m}$$

Et finalement : $p_2 = 1400 - 851 = 549 \text{ m}$

EXTRI298 – Polytech, UMONS, Mons, juillet 2010.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$3 \sin x + \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Méthode 1

$$3 \sin x + \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \rightarrow 3 \sin x + \cos x = 1 - \cos x + \frac{1}{2}(1 + \cos x)$$

$$\rightarrow 3 \sin x + \frac{3}{2} \cos x = \frac{3}{2} \rightarrow \cos x + 2 \sin x = 1$$

$$\text{Soit } 2 = \tan \varphi \text{ où } \varphi \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\rightarrow \cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi = \cos \varphi$$

$$\rightarrow \cos(x - \varphi) = \cos \varphi$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - \varphi = \varphi + 2k\pi \rightarrow x = 2\varphi + 2k\pi \rightarrow \boxed{x = 2 \arctan 2 + 2k\pi} \\ x - \varphi = -\varphi + 2k\pi \rightarrow \boxed{x = 2k\pi} \end{cases}$$

Méthode 2

$$3 \sin x + \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\rightarrow 6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cancel{\cos^2 \frac{x}{2}} - \cancel{\sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cancel{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\rightarrow 6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 3 \sin^2 \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \sin \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$\text{1er cas : } \sin \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \boxed{x = 2k\pi}$$

$$\text{2ème cas : } 2 \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \tan \frac{x}{2} = 2 \left(\text{si } \cos \frac{x}{2} \neq 0 \text{ (1)} \right)$$

$$\rightarrow \frac{x}{2} = \arctan 2 + k\pi \rightarrow \boxed{x = 2 \arctan 2 + 2k\pi}$$

$$(1) \cos \frac{x}{2} \neq 0 \text{ car } \sin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x = \pi + 2k\pi \text{ qui n'est pas solution de l'équation.}$$

EXTRI299 – Polytech, UMONS, Mons, juillet 2010.

Démontrer l'identité suivante:

$$\cos(A+4B)\sin(2B) + \cos(A+B)\sin(B) = \cos(A+3B)\sin(3B)$$

Solutions proposées par Fabienne Zoetard

Méthode A.

$$\cos(A+4B)\sin 2B + \cos(A+B)\sin B = \cos(A+3B)\sin 3B$$

$$\cos A \cos 4B \sin 2B - \sin A \sin 4B \sin 2B + \cos A \cos B \sin B - \sin A \sin^2 B$$

$$- \cos A \cos 3B \sin 3B + \sin A \sin^2 3B = 0$$

$$\cos A \underbrace{(\cos 4B \sin 2B + \cos B \sin B - \cos 3B \sin 3B)}_P$$

$$+ \sin A \underbrace{(-\sin 4B \sin 2B - \sin^2 B + \sin^2 3B)}_Q = 0 \quad (1)$$

$$P = \underbrace{\cos 4B \sin 2B}_{\text{Simpson inverse}} + \cos B \sin B - \cos 3B \sin 3B$$

$$= \frac{1}{2}(\sin(-2B) + \sin 6B) + \cos B \sin B - \cos 3B \sin 3B$$

$$= -\sin B \cos B + \sin 3B \cos 3B + \cos B \sin B - \cos 3B \sin 3B = 0$$

$$Q = -\underbrace{\sin 4B \sin 2B}_{\text{Simpson inverse}} - \sin^2 B + \sin^2 3B$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 2B - \cos 6B) - \sin^2 B + \sin^2 3B$$

$$= -\frac{1}{2}(\cancel{1} - 2\cos^2 B - \cancel{1} + 2\sin^2 3B) - \sin^2 B + \sin^2 3B = 0$$

En portant P et Q dans (1), on vérifie que l'égalité est vérifiée.

Méthode B

$$\cos(A + 4B)\sin 2B + \cos(A + B)\sin B = \cos(A + 3B)\sin 3B$$

Ou bien

$$2\cos(A + 4B)\sin 2B + 2\cos(A + B)\sin B = 2\cos(A + 3B)\sin 3B$$

On utilise Simpson inverse :

$$\sin(-2b - a) + \cancel{\sin(a + 6b)} + \sin(a + 2b) + \cancel{\sin(-a)} = \cancel{\sin(-a)} + \cancel{\sin(a + 6b)}$$

Or $\sin(-2b - a) = -\sin(a + 2b)$, ce qui vérifie la relation.

Remarque : les formules de Simpson inverse ne font pas partie de la liste des formules admises. Il faut donc les démontrer. Ce qui est très simple à partir des formules d'addition.

15 Août 2010. Modifié le 31 mars 2011 (Fabienne Zoetard)