Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 3

EXTRI030 – EXTRI039

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

EXTRI030 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos^2 a+\cos^2 b=2\cos a\cos b\cos x+\sin^2 x$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\cos^2 a+\cos^2 b=2\cos a\cos b\cos x+\sin^2 x$$
$$\frac{1}{2}\cos 2a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2b+\frac{1}{2}-2\cos a\cos b\cos x=1-\cos^2 x$$
$$\cos(a+b)\cos(a-b)-[\cos(a+b)+\cos(a-b)]\cos x=-\cos^2 x$$
$$\cos^2 x-[\cos(a+b)+\cos(a-b)]\cos x+\cos(a+b)\cos(a-b)=0$$
$$\textit{Calculons le } \Delta$$
$$\Delta=\cos^2(a+b)+2\cos(a+b)\cos(a-b)+\cos^2(a-b)-4\cos(a+b)\cos(a-b)$$
$$=[\cos(a+b)-\cos(a-b)]^2$$
$$\cos x=\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)\pm[\cos(a+b)-\cos(a-b)]}{2}$$
$$1)\ \cos x=\frac{2\cos(a+b)}{2}\quad\to\quad x=\pm(a+b)+2k\pi$$
$$2)\ \cos x=\frac{2\cos(a-b)}{2}\quad\to\quad x=\pm(a-b)+2k\pi$$
$$\to\quad x=\pm(a\pm b)+2k\pi$$

EXTRI031 – FPMS, Mons, questions-types 2000-2001. EPL, UCL, Louvain – Juillet 07

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\tan(a+x)\tan(a-x)=\frac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\tan(a+x)\tan(a-x)=\frac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}$$

$$CE:\ a+x\neq\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad a+x\neq\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad a\neq\pm\frac{3\pi}{8}+k\pi$$

Transformons le premier membre :

$$\begin{aligned}\tan(a+x)\tan(a-x)&=\frac{\sin(a+x)\sin(a-x)}{\cos(a+x)\cos(a-x)}\\&=\frac{\cos(a+x-a+x)-\cos(a+x+a-x)}{\cos(a+x-a+x)+\cos(a+x+a-x)}\\&=\frac{\cos 2x-\cos 2a}{\cos 2x+\cos 2a}\end{aligned}$$

$$\rightarrow\quad\frac{\cos 2x-\cos 2a}{\cos 2x+\cos 2a}=\frac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a}$$

$$\begin{aligned}&\cos 2x-\cos 2a+2\cos 2a\cos 2x-2\cos^2 2a\\&\qquad=\cos 2a-2\cos^2 2a+\cos 2x-2\cos a\cos 2x\end{aligned}$$

$$4\cos 2a\cos 2x=2\cos 2a\quad(1)$$

Si $\cos 2a=0\quad\rightarrow\quad a=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$

L'équation (1) devient $0.\cos 2x=0$. Donc x est indéterminé.

Ce qui revient à dire que l'équation de départ est alors une identité indépendante de x : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1$

Il reste

$$\cos 2x=\frac{1}{2}\quad\rightarrow\quad x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$$

Modifié le 1 juillet 2006 (Meriem)

EXTRI032 – Liège, septembre 2000.

Vérifier l'identité

$$\tan a + 2\tan 2a + 4\tan 4a + 8\cot 8a = \cot a$$

$$\tan\ a + 2\tan\ 2a + 4\tan\ 4a + 8\cot\ 8a = \cot\ a$$

$$\text{Rappel}: \cot\ 2\alpha = \frac{1}{2}\cot\ \alpha - \frac{1}{2}\tan\ \alpha$$

$$\begin{aligned}
&\tan\ a + 2\tan\ 2a + 4\tan\ 4a + 8\cot\ 8a \\
&= \tan\ a + 2\tan\ 2a + 4\tan\ 4a + 4\cot\ 4a - 4\tan\ 4a \\
&= \tan\ a + 2\tan\ 2a + 4\cot\ 4a \\
&= \tan\ a + 2\tan\ 2a + 2\cot\ 2a - 2\tan\ 2a \\
&= \tan\ a + 2\cot\ 2a \\
&= \tan\ a + \cot\ a - \tan\ a \\
&= \cot\ a
\end{aligned}$$

EXTRI033 – FACSA, ULG, Liège - Juillet 1999.
Polytech, UMONS, Mons – Juillet 2005.
FACSA, ULG, Liège – septembre 2010

a) Si a, b et c sont en progression arithmétique, vérifier que :

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\cos a + \cos b + \cos c} = \tan b$$

b) Pour quelles valeurs de la raison la proposition est-elle en défaut ?

c) Etudier la réciproque.

Suggestion : si p est la raison arithmétique, exprimer a et c en fonction de b et p.

ENONCE POLYTECH

Si a, b et c sont en progression arithmétique, vérifier que :

$$\frac{\sin a + \sin b + \sin c}{\cos a + \cos b + \cos c} = \sqrt{3}$$

$a)$ Soit p la raison :

$$\frac{\sin a+\sin b+\sin c}{\cos a+\cos b+\cos c}=\frac{\sin(b-p)+\sin b+\sin(b+p)}{\cos(b-p)+\cos b+\cos(b+p)}$$

$$=\frac{2\sin\dfrac{b-p+b+p}{2}\cos\dfrac{b-p-b-p}{2}+\sin b}{2\cos\dfrac{b-p+b+p}{2}\cos\dfrac{b-p-b-p}{2}+\sin b}$$

$$=\frac{2\sin b\cos p+\sin b}{2\cos b\cos p+\cos b}=\frac{\sin b(2\cos p+1)}{\cos b(2\cos p+1)}=\tan b$$

<u>Polytech</u> : $a+b+c=180° \to (b-p)+b+(b+p)=180° \to b=60° \to \tan b=\sqrt{3}$

$b)$ si $2\cos p+1=0 \quad \to \quad p=\pm 120+2k\pi$

$c)$ si on a : $\tan b=\dfrac{\sin b}{\cos b}=\dfrac{\sin a+\sin b+\sin c}{\sin a+\sin b+\sin c}$

$$\sin b\cos a+\sin b\cos b+\sin b\cos c=\cos b\sin a+\cos b\sin b+\cos b\sin c$$

$$\sin b(\cos a+\cos c)=\cos b(\sin a+\sin c)$$

$$\tan b=\frac{\sin a+\sin c}{\cos a+\cos c}$$

$$\tan b=\frac{\frac{1}{2}\sin\dfrac{a+c}{2}\cos\dfrac{a-c}{2}}{\frac{1}{2}\cos\dfrac{a+c}{2}\cos\dfrac{a-c}{2}}=\tan\frac{a+c}{2}$$

Cette relation est vérifiée si $b=\dfrac{a+c}{2}$ c'est-à-dire si a, b, et c sont en progression arithmétique.

Modifié le 26 décembre 2009

EXTRI034 – FACSA, ULG, Liège - Septembre 1999.

si $a+b+c=\pi$ vérifier que

$$\sin a-\sin b+\sin c=4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$\text{si } a+b+c=\pi \quad\rightarrow\quad \pi-c=a+b$$

$$\sin a-\sin b+\sin(a+b)$$

$$=\sin a-\sin b+\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$=\sin a(1+\cos b)-\sin b(1-\cos a)$$

$$=2\sin a\cos^2\frac{b}{2}-\sin b\left(1-1+2\sin^2\frac{a}{2}\right)$$

$$=2\sin a\cos^2\frac{b}{2}-2\sin b\sin^2\frac{a}{2}$$

$$=2\left[2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}-2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}\sin^2\frac{a}{2}\right]$$

$$=4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\left[\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\sin\frac{b}{2}\sin\frac{a}{2}\right]$$

$$=4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$=4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\left(\frac{\pi-c}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

EXTRI035 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 1998.
EPL, UCL, Louvain, juillet 2005.

Montrer que si les angles d'un triangle ABC vérifient la relation

$$\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$$

le triangle est rectangle

$A = \pi - (B+C) \quad \to \quad \sin A = \sin(B+C)$

D'une part, on a : $\sin 4A = 2\sin 2A \cos 2A$

$$\sin 2A = \sin 2\left[\pi - (B+C)\right] = \sin 2\pi \cos 2(B+C) - \sin 2(B+C)\cos 2\pi$$
$$= -\sin 2(B+C)$$

$$\cos 2A = \cos 2\left[\pi - (B+C)\right] = \cos 2\pi \cos\left[-2(B+C)\right] - \sin 2\pi \sin 2(B+C)$$
$$= \cos 2(B+C)$$

$$\Rightarrow \quad \sin 4A = -2\sin 2(B+C)\cos 2(B+C)$$

D'autre part :

$$\sin 4B + \sin 4C = 2\sin 2(B+C)\cos 2(B-C) \qquad \text{(Simpson)}$$

Utilisons ces relations en remplaçant dans l'expression de départ :

$$\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$$
$$\Rightarrow -2\sin 2(B+C)\cos 2(B+C) + 2\sin 2(B+C)\cos 2(B-C) = 0$$
$$\Rightarrow \sin 2(B+C)\left[-\cos 2(B+C) + \cos 2(B-C)\right] = 0$$

Cette équation est vérifiée si :

1) $\sin 2(B+C) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(B+C) = 0 & \to \quad B + C = k\pi \quad \text{Pas de triangle} \\ 2(B+C) = \pi & \to \quad B + C = \dfrac{\pi}{2} \quad \text{Rectangle en } A \end{cases}$$

2) $-\cos 2(B+C) + \cos 2(B-C) = 0$

$$\cos 2(B+C) = \cos 2(B-C)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(B+C) = 2(B-C) + 2k\pi & \to \quad C = \dfrac{\pi}{2} \quad \text{Rectangle en } C \\ 2(B+C) = -2(B-C) + 2k\pi & \to \quad B = \dfrac{\pi}{2} \quad \text{Rectangle en } B \end{cases}$$

EXTRI036 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 1998.

Montrer que si les angles d'un triangle ABC vérifient la relation

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$$

l'un des angles est égal à 60°

Comme la somme des angles d'un triangle vaut 180°, on a : $A = 180° - (B + C)$

$\Rightarrow \sin A = \sin(B + C)$ ou encore

$\sin 3A = \sin 3(B + C) = 2\sin\frac{3}{2}(B + C)\cos\frac{3}{2}(B + C).$

On introduit cette relation dans l'expression donnée et on utilise Simpson.

$\sin 3A + \underbrace{\sin 3B + \sin 3C}_{Simpson}$

$= 2\sin\frac{3}{2}(B + C)\cos\frac{3}{2}(B + C) + 2\sin\frac{3}{2}(B + C)\cos\frac{3}{2}(B - C)$

$= 2\sin\frac{3}{2}(B + C)\left[\cos\frac{3}{2}(B + C) + \cos\frac{3}{2}(B - C)\right] = 0$

Ce qui nous donne une première solution :

1) $\sin\frac{3}{2}(B + C) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}(B + C) = k180° \Rightarrow 180 - A = \frac{2}{3}k180°$

$\Rightarrow A = 180° - k120° = 60°$

Il reste : $\cos\frac{3}{2}(B + C) + \cos\frac{3}{2}(B - C) = 0$

Ou encore : $\cos\frac{3}{2}(B + C) = -\cos\frac{3}{2}(B - C) = \cos\left[180° - \frac{3}{2}(B - C)\right]$

On obtient les solutions suivantes :

2) $\frac{3}{2}(B + C) = 180° - \frac{3}{2}(B - C) \Rightarrow B + C = 120° - B + C \Rightarrow B = 60°$

3) $\frac{3}{2}(B + C) = -180° + \frac{3}{2}(B - C) \Rightarrow B + C = -120 + B - C \Rightarrow C = -60°$

Mais d'un point de vue géométrique, on considère la valeur absolue de l'angle, donc $C = 60°$.

On a donc bien obligatoirement un angle de 60°.

Modifié le 5 septembre 2018

EXTRI037 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1997.

Si $a+b+c=\pi$, vérifier les identités suivantes.

$a)$ $\cos 4a+\cos 4b+\cos 4c+1=4\cos 2a\cos 2b\cos 2c$

$b)$ $\dfrac{\tan b+\tan c}{\sin 2a}=\dfrac{\tan c+\tan a}{\sin 2b}=\dfrac{\tan a+\tan b}{\sin 2c}$

$a)$ $\cos 4a+\cos 4b+\cos 4c+1=4\cos 2a\cos 2b\cos 2c$

$\cos 4a+\cos 4b+\cos 4c+1=2\cos^2 2a+2\cos^2 2b+2\cos^2 2c-2$

or

$$\cos 2a=\cos 2\left[\pi-(b+c)\right]=\cos 2\pi\cos(b+c)-\sin 2\pi\sin 2(b+c)$$
$$=\cos 2(b+c)=\cos 2b\cos 2c-\sin 2b\sin 2c$$

$$\cos^2 2a=\cos^2 2b\cos^2 2c-2\cos 2b\cos 2c\sin 2b\sin 2c+\sin^2 2b\sin^2 2c$$
$$=\cos^2 2b\cos^2 2c-2\cos 2b\cos 2c\sin 2b\sin 2c+(1-\cos^2 2b)(1-\cos^2 2c)$$
$$=2\cos^2 2b\cos^2 2c-2\cos 2b\cos 2c\sin 2b\sin 2c-\cos^2 2b-\cos^2 2c+1$$

donc

$$2\cos^2 2a+2\cos^2 2b+2\cos^2 2c-2$$
$$=4\cos^2 2b\cos^2 2c-4\cos 2b\cos 2c\sin 2b\sin 2c$$
$$=4\left(\cos 2b\cos 2c-\sin 2b\sin 2c\right)\cos 2b\cos 2c$$
$$=4\cos 2(b+c)\cos 2b\cos 2c$$
$$=4\cos 2a\cos 2b\cos 2c$$

$b)$ $\dfrac{\tan b+\tan c}{\sin 2a}=\dfrac{\tan c+\tan a}{\sin 2b}=\dfrac{\tan a+\tan b}{\sin 2c}$

$$\frac{\tan b+\tan c}{\sin 2a}=\frac{\tan c+\tan a}{\sin 2b}$$

$$\frac{\sin(b+c)}{\cos b\cos c\sin 2a}=\frac{\sin(c+a)}{\cos a\cos c\sin 2b}$$

$$\frac{\sin a}{2\cos b\cos c\sin a\cos a}=\frac{\sin(c+\pi-b-c)}{2\cos a\cos c\sin b\cos b}$$

$$\frac{\sin a}{\sin a}=\frac{\sin(\pi-b)}{\sin b}=1$$

Tous les rapports sont égaux à 1.

EXTRI038 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1996
FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2004.

Si a

$$\sin\left(a+b+c+d\right)=0$$

vérifier que :

$$\sin\left(a+c\right)\sin\left(a+d\right)=\sin\left(b+c\right)\sin\left(b+d\right)$$

$$\sin\left(a+c\right)\sin\left(a+d\right)=\sin\left(b+c\right)\sin\left(b+d\right)$$

$$\frac{1}{2}\cos\left(a+c-a-d\right)-\frac{1}{2}\cos\left(a+c+a+d\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cos\left(b+c-b-d\right)-\frac{1}{2}\cos\left(b+c+b+d\right)$$

$$\cos\left(c-d\right)-\cos\left(2a+c+d\right)=\cos\left(c-d\right)-\cos\left(2b+c+d\right)$$

$$\cos\left(2a+c+d\right)-\cos\left(2b+c+d\right)=0$$

$$-2\sin\frac{1}{2}\left(2a+2b+2c+2d\right)\sin\frac{1}{2}\left(2a+c+d-2b-c-d\right)=0$$

$$\sin\left(a+b+c+d\right)\sin\left(a-b\right)=0$$

Ce qui est vérifié en vertu de l'hypothèse.

EXTRI039 – Liège, juillet 1997.

:

Soit

$$E = \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c - 1$$

Montrer que si :

$$c = a + b$$

alors E = 0.

La réciproque est-elle vraie ?

$E = \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c - 1$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos^2(a+b) = \cos^2 a \cos^2 b - 2\sin a \sin b \cos a \cos b + \sin^2 a \sin^2 b$

Donc, puisque $\quad c = a + b$:

$$\begin{aligned}
E &= \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b - 2\sin a \sin b \cos a \cos b + \sin^2 a \sin^2 b \\
&\quad - 2\cos^2 a \cos^2 b + 2\sin a \sin b \cos a \cos b - 1 \\
&= \cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b - 1 \\
&= \cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2 a \cos^2 b + (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

<u>Réciproque</u>

Soit: $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2\cos a \cos b \cos c - 1 = 0$

C'est une équation du second degré en cos c.

$$\begin{aligned}
\cos c &= \cos a \cos b \pm \sqrt{\cos^2 a \cos^2 b + 1 - \cos^2 a - \cos^2 b} \\
&= \cos a \cos b \pm \sqrt{(\cos^2 a - 1)(\cos^2 b - 1)} \\
&= \cos a \cos b \pm \sin a \sin b
\end{aligned}$$

1) $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b)$

$\rightarrow \quad c = \pm(a-b)$

2) $\cos c = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$

$\rightarrow \quad c = \pm(a+b)$

Conclusion : $c = \pm(a \pm b)$

La réciproque n'est donc pas nécessairement vraie.