Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 32

EXTRI320-EXTRI329

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans

Septembre 2011

EXTRI320 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011

Pour les affirmations suivantes, cochez laquelle de ces affirmations est la vraie.

- Un triangle qui ne contient pas le centre du cercle dans lequel il est inscrit, est

  Obtus ☐ Rectangle ☐ Aigu ☐

- Dans l'intervalle $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$, l'équation $3\sin x = 8\sin^3 x$ possède exactement

  1 solution ☐ 2 solutions ☐ 3 solutions ☐

- L'expression $\dfrac{\tan(x-y)+\tan y}{1-\tan(x-y)\tan y}$ est identiquement égale à

  $\tan x$ ☐ $\tan y$ ☐ $\tan(x+y)$ ☐

- Si dans un triangle ABC on a $\sin^2 A > \sin^2 B + \sin^2 C$, alors

  $A < 90°$ ☐ $A = 90°$ ☐ $A > 90°$ ☐

---

1) Obtus

2) $3\sin x = 8\sin^3 x$

<u>1er cas</u> : $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0$

<u>2ème cas :</u> $\sin^2 x = \frac{3}{8} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$

- $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 0.21\pi \\ x = \pi - 0.21\pi = 0.79\pi \quad \text{A rejeter} \end{cases}$
- $\sin x = -\frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -0.21\pi \\ x = \pi + 0.21\pi = 1.21\pi \quad \text{A rejeter} \end{cases}$

3 solutions

3) $$\frac{\tan(x-y)+\tan y}{1-\tan(x-y)\tan y} = \frac{\dfrac{\tan x - \tan y}{1+\tan x\tan y}+\tan y}{1-\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x \tan y}\tan y} = \frac{\dfrac{\tan x - \cancel{\tan y} + \cancel{\tan y} + \tan x\tan^2 y}{\cancel{1+\tan x \tan y}}}{\dfrac{1+\cancel{\tan x \tan y} - \cancel{\tan x\tan y} + \tan^2 y}{\cancel{1+\tan x\tan y}}}$$

$$= \frac{\tan x\left(1+\tan^2 y\right)}{1+\tan^2 y} = \tan x$$

4) $\sin^2 A > \sin^2 B + \sin^2 C \Rightarrow \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A < 0$

$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2}\sin^2 A + \frac{c^2}{a^2}\sin^2 A - \sin^2 A < 0$ (Formules des sinus)

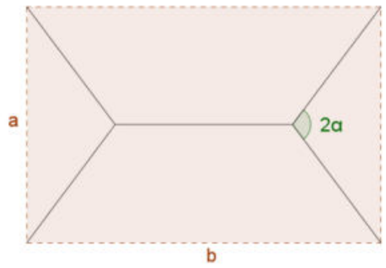
$\Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 < 0 \Rightarrow 2bc\cos A < 0$ (Formule des cosinus)

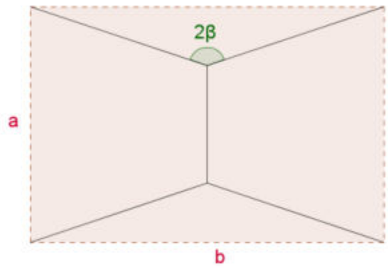
$\Rightarrow \cos A < 0 \Rightarrow A > 90°$ car b et c sont positifs et différents de zéro.

Le 16 octobre 2010.

EXTRI321 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011.

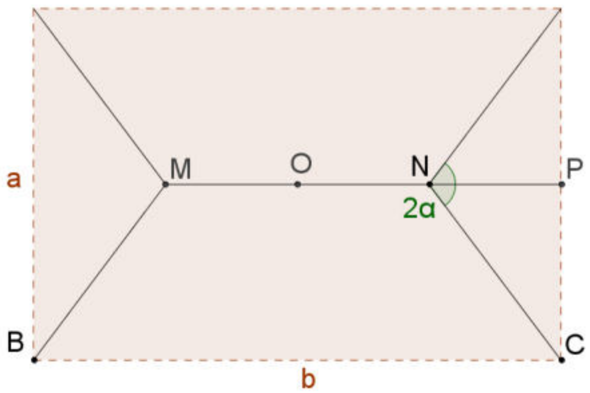
On cherche à relier quatre villes, qui forment les coins d'un rectangle de dimensions a fois b, par des routes de façon à ce que la somme des longueurs des tronçons (c-à-d les lignes en traits plein), soit de longueur minimale.
Par souci de simplicité nous cherchons des solutions d'un des deux types suivants (avec deux points d'intersections intérieurs).





où les deux dessins sont symétriques par rapport à l'horizontale aussi bien que par rapport à la verticale.

1) Pour chacun des deux dessins, donnez les bornes que doivent satisfaire les angles α et β, en fonction de a et b.
2) Pour chacun des deux dessins, donnez les longueurs totales des tronçons, en fonction de a, b, α d'une part et en fonction de a, b et β d'autre part.
3) Donnez les dérivées de ces longueurs totales par rapport à α et β et trouvez les solutions optimales de α et β à un degré près.
4) Pour $a = 20$ km et $b = 30$ km, calculez la longueur des différents tronçons du choix optimal à un km près.



1) Les positions extrêmes de N sont

O milieu de $MN \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{a}{b}$

$P \Rightarrow \alpha = 90°$

Et donc : $\arctan\dfrac{a}{b} \leq \alpha \leq 90°$

Par symétrie : $\arctan\beta = \dfrac{b}{a}$

2) Traitons le cas pour α. La longueur totale des trançons est :

$$L_\alpha = 4\overline{NC} + \overline{BC} - 2\overline{NP} = 4.\frac{a/2}{\sin\alpha} + b - 2.\frac{a/2}{\tan\alpha}$$

$$= \frac{2a}{\sin\alpha} + b - \frac{a}{\tan\alpha}$$

Par symétrie : $L_\beta = \dfrac{2b}{\sin\beta} + a - \dfrac{b}{\tan\beta}$

3) $\dfrac{dL_\alpha}{d\alpha} = -\dfrac{2a}{\sin^2\alpha}\cos\alpha + \dfrac{a}{\tan^2\alpha}.\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = -\dfrac{2a}{\sin^2\alpha}\cos\alpha + \dfrac{a}{\sin^2\alpha}$

$$= \frac{a}{\sin^2\alpha}(-2\cos\alpha + 1)$$

Dérivée qui sera nulle pour : $-2\cos\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 60°$

Par symétrie : $\dfrac{dL_\beta}{d\beta} = \dfrac{b}{\sin^2\beta}\left(-2\cos\beta + 1\right) \Rightarrow \beta = 60°$

Les solutions optimales sont alors :

$$L_{\alpha opt} = \frac{2a}{\sqrt{3}/2} + b - \frac{a}{\sqrt{3}} = \boxed{a\sqrt{3} + b}$$

$$\boxed{L_{\beta opt} = b\sqrt{3} + a}$$

4) Pour $a = 20$ km et $b = 30$ km, le chemin optimal est donné par $L_{\alpha opt}$.

On a : $\overline{NC} = \dfrac{20\sqrt{3}}{3} \cong 11.5$ km et $\overline{MN} = 30 - \dfrac{20\sqrt{3}}{3} \cong 6.2$ km

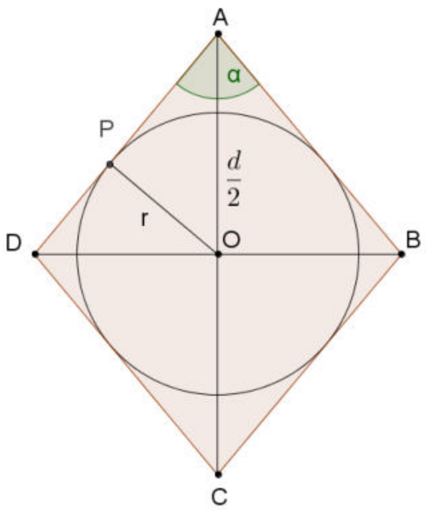
$$\Rightarrow L = 4.\frac{20\sqrt{3}}{3} + 30 - \frac{20\sqrt{3}}{3} = \boxed{30 + 20\sqrt{3} \cong 64.6 \text{ km}}$$

Le 4 novembre 2011£+

EXTRI322 – EPL, UCL, Louvain, Septembre 2011.

On dispose d'une pièce $ABCD$ de forme losange dont l'angle en A est α et la longueur de la diagonale AC est notée d.

- Représentez graphiquement le cercle le plus grand que l'on peut découper dans cette pièce et exprimez mathématiquement son aire en fonction de d et α.
- Estimez cette aire au cm^2 près, pour $d = 12$ cm et $\alpha = 60°$.
- Calculez l'expression mathématique de la chute (c-à-d l'aire restant de la pièce losange après découpe du cercle) en fonction de r, le rayon du cercle, et de α.
- Calculez l'angle α qui minimise cette chute pour r fixe.



$$r = \overline{PO} = \frac{d}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow d = \frac{2r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

L'aire du cercle est donnée par : $A_{Cercle} = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}$

Donc : $A_{Cercle} = \frac{\pi \times 12^2}{4}\sin^2\frac{60}{2} = 9\pi$

L'aire du losange est :

$$A_{losange} = \frac{d.\overline{DB}}{2} = d.\overline{DO} = d.\frac{d}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{d^2}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{4r^2}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{4r^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4r^2}{\sin\alpha}$$

L'aire de la chute est :

$$A_{chute} = A_{losange} - A_{cercle} = \frac{4r^2}{\sin\alpha} - \pi r^2$$

Cette chute sera minimale si sa dérivée est nulle :

$$\frac{dA_{chute}}{d\alpha} = -\frac{4r^2}{\sin^2\alpha}\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

C'est bien un minimum

		$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{dA_{chute}}{d\alpha}$	$-$	0	$+$
A_{chute}	↘	min	↗

Autrement dit le losange est un carré.

Le 6 novembre 2011

EXTRI323 – EPL, UCL, Louvain, Septembre 2011.

Pour quelles valeurs de x comprises dans l'intervalle $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, la fonction $f(x)$ suivante est-elle strictement positive?

$$f(x) = \sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x + \sin x$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

Pour étudier le signe de $f(x)$, on va le factoriser.

1) Diminuons le degré des $\sin x$ et $\cos x$.

$$f(x) = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x - \sqrt{3}\cos x + \sin x$$

2) Groupons les termes afin de pouvoir utiliser les formules de Simpson

$$f(x) = \sqrt{3}(\cos 2x - \cos x) + (\sin 2x + \sin x)$$

Les formules de Simpson sont appliquées 2 fois

$$f(x) = -2\sqrt{3}\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

3) Mise en évidence

$$f(x) = 2\sin\frac{3x}{2}\left(-\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)$$

4) Racines et signe

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\frac{3x}{2}$	0	+	+	+	0	−	0	+	+
$-\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$	+	+	0	−	−	−	−	−	−
$f(x)$	0	+	0	−	0	+	0	−	−

<u>Conclusion</u> : $f(x)$ est strictement positive dans l'intervalle $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\boxed{\text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[}$$

Méthode alternative 1

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x + \sin x \\
&= \sqrt{3}\cos^2 x - \sin x\cos x + 3\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x + \sin x \\
&= \cos x\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right) + \sqrt{3}\sin x\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right) - \left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right) \\
&= \left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x - 1\right)
\end{aligned}$$

Cherchons les racines dans l'intervalle $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

$a)\ \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$

$b)\ \cos x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \tan\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}$

L'équation devient : $\cos\left(x - \varphi\right) = 1.\cos\varphi$

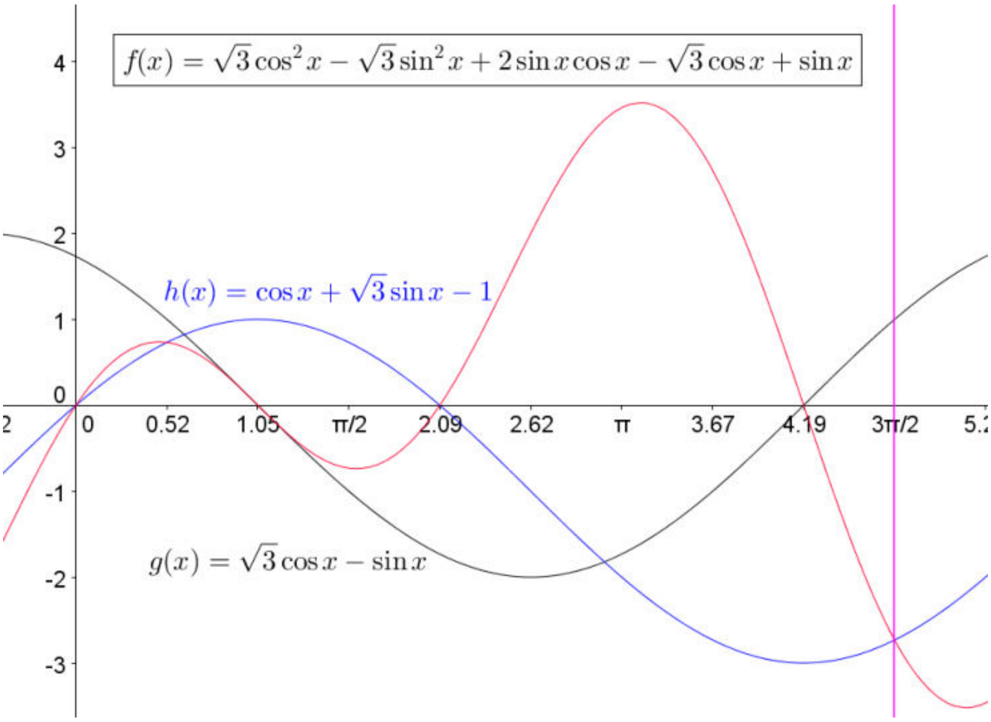
$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Il reste à dresser le tableau de signes

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$
$\sqrt{3}\cos x - \sin x$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\cos x + \sqrt{3}\sin x - 1$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$

<u>Conclusion :</u> $f(x)$ est strictement positive dans l'intervalle $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\boxed{\text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[}$$



Méthode alternative 2

Cette méthode fait appel à des notions qui ne font plus partie du programme du secondaire. Nous donnons cette alternative simplement pour montrer qu'il est parfois possible de résoudre certains problèmes en faisant appel à des théories qui en principe n'ont rien avoir avec le problème posé.

Dans l'expression $f(x)=0$, on reconnait une conique si $X=\sin x$ et $Y=\cos x$.

Pour pouvoir factoriser celle-ci il faudrait qu'elle soit dégénérée en deux droites ou une droite double !

Un rappel sur les coniques est donné ci-dessous.

Soit la fonction $f(x)=\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x+2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos x+\sin x$

On pose $Y=\cos x$ et $X=\sin x$ et on obtient.

$$F(X,Y)=\sqrt{3}Y^2+2YX-\sqrt{3}X^2-\sqrt{3}Y+X$$

Ce qui est l'équation d'une conique avec :

$$\delta=-\begin{vmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{vmatrix}=4>0 \text{ : c'est donc une hyperbole.}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sqrt{3} & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 1 & -\sqrt{3} & \frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{vmatrix}=0 \text{ : c'est une hyperbole dégénérée en ses deux asymptotes.}$$

Les coefficients angulaires des asymptotes s'obtient à partir de :

$$\sqrt{2}m^2+2m-\sqrt{3}=0\Rightarrow\begin{cases}m_1=-\sqrt{3}\\ m_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

Les équations des asymptotes sont :

$$T_1\equiv f'_x+m_1f'_y=2y-2\sqrt{3}x+1-\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}y+2x-\sqrt{3}\right)=-4\left(y+\sqrt{3}x-1\right)=0$$

$$\Rightarrow T_1\equiv y+\sqrt{3}x-1=0$$

$$T_2\equiv f'_x+m_2f'_y=2y-2\sqrt{3}x+1+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sqrt{3}y+2x-\sqrt{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{3}y-x\right)=0$$

$$\Rightarrow T_1\equiv\sqrt{3}y-x=0$$

Donc : $F(X,Y)=\left(y+\sqrt{3}x-1\right)\left(\sqrt{3}y-x\right)$

Et donc : $f(x)=\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x-1\right)\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)$

Pour la suite : voir alternative 1

Rappel

Classification synthétique des courbes du deuxième ordre

Soit la conique :

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$$

On définit

$$\delta = -\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

Alors

$$1)\ \delta < 0 \Rightarrow \begin{cases} -A\Delta > 0 & \text{Ellipse réelle} \\ -A\Delta = 0 & \text{Ellipse dégénérée} \\ -A\Delta < 0 & \text{Ellipse imaginaire} \end{cases}$$

$$2)\ \delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \neq 0 & \text{Hyperbole proprement dite} \\ \Delta = 0 & \text{Hyperbole dégénérée} \end{cases}$$

$$3)\ \delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta \neq 0 & \text{Parabole proprement dite} \\ \Delta = 0 & \text{Parabole dégénérée} \end{cases}$$

Détermination des asymptotes d'une conique

L'équation d'une asymptote à une conique s'écrit :

$$f_x' + mf_y' = 0$$

$$Am^2 + 2Bm + C = 0$$

avec

f_x' et f_y' : les dérivées partielles respectivement par rapport à x et à y

$$f_x' = 2By + 2Cx + 2E$$

$$f_y' = 2Ay + 2Bx + 2D$$

m : coefficient de direction des asymptotes.

EXTRI324 – EPL, UCL, Louvain, Septembre 2011.

Pour les affirmations suivantes, cochez laquelle de ces affirmations est la vraie.

- La somme des angles A, B, C et D d'un quadrilatère $ABCD$ dont les segments AB et CD s'intersectent

  est toujours égale à 240° ☐ est toujours égale à 360° ☐ n'est pas constante ☐

- Dans l'intervalle $0 < x < \frac{\pi}{2}$, l'équation $\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}=1$ admet strictement

  1 solution ☐ 2 solutions ☐ 3 solutions ☐

- L'expression $\frac{\sin + \sin b}{\cos a + \cos b}$ est identiquement égale à

  $\tan(a+b)$ ☐ $\tan\frac{a+b}{2}$ ☐ $2\tan\frac{a+b}{2}$ ☐

- Si dans un triangle ABC rectangle en A, les côtés a, b et c (opposés aux angles respectifs A, B et C) satisfont $b=\sqrt{3}c$, alors

  $B < 75°$ ☐ $B = 75°$ ☐ $B > 75°$ ☐

---

1) N'est pas constante.

2) $\frac{\tan x}{1-\tan^2 x}=1 \Rightarrow \frac{1}{2}\tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = 2 \Rightarrow x = 0.553 + k\frac{\pi}{2}$

Donc une seule racine dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

3) $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}} = \tan\frac{a+b}{2}$

4) $\tan B = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}c}{c} = \sqrt{3} \Rightarrow B = 60° < 75°$

Le 6 novembre 2011

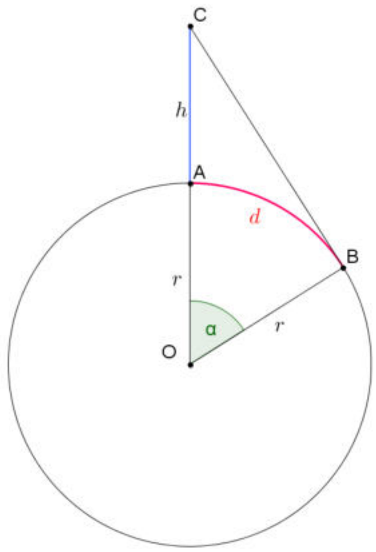
EXTRI325 – EPL, UCL, Louvain, Septembre 2011.

A partir d'un point A de la surface de la terre supposée parfaitement sphérique de rayon r; on considère la calotte sphérique formée par les points B tels que le chemin le plus court entre A et B le long de la surface de la terre est de longueur strictement inférieure à d. On construit une tour de hauteur h à la verticale du point A.

1) Faites un croquis de la situation et indiquez-y les quantités r, d et h ainsi que les variables intermédiaires que vous utiliserez dans vos calculs.

2) Donnez les formules qui permettent de calculer, en fonction des variables r et d, la hauteur minimale de h telle que le sommet de la tour soit en vue directe de tous les points de la calotte.

3) Calculez la hauteur h à un mètre près pour les ensembles de données suivantes : $r = 6371$ km, $d = 100$ km et $r = 6371$ km, $d = 15000$ km.



$$h = \overline{OC} - r \qquad \text{avec} \qquad \overline{OC} = \frac{r}{\cos\alpha} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{d}{r} \quad \text{(en radian)}$$

$$\Rightarrow h = \frac{r}{\cos\frac{d}{r}} - r = r\left(\frac{1}{\cos\frac{d}{r}} - 1\right)$$

1) Si $r = 6371$ km et $d = 100\ km$

$$h = 6731000\left(\frac{1}{\cos\frac{100}{6371}} - 1\right) = 785\ m$$

2) Si $r = 6371$ km et $d = 15000\ km$

Il n'y a pas de solution car d doit être plus petit que le quart de la circonférence de la Terre : $15000 > \frac{2\pi \times 6371}{4} = 10007$

Le 6 novembre 2011

EXTRI326 – FACS, ULB, Bruxelles, Juillet 2011.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$

Solution proposée par Jan Frans BROECKX

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\sin 3x + \sin x) + (\sin 4x + \sin 2x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2 \sin 2x \,.\cos x + 2 \sin 3x \,.\cos x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2 \cos x \,.(\sin 3x + \sin 2x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4 \cos x \,.\sin \frac{5x}{2} .\cos \frac{x}{2} = 0 \end{aligned}$$

(a) $\cos x = 0$

$$S_1 = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(b) $\cos \frac{x}{2} = 0$

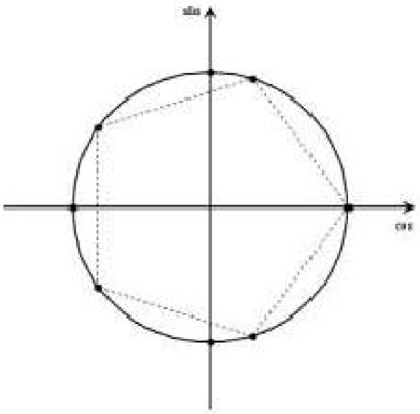
$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$S_2 = \{\pi + 2k\pi \| k \in \mathbb{Z}\}$$

(c) $\sin \frac{5x}{2} = 0$

$$\frac{5x}{2} = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$S_3 = \left\{k \frac{2\pi}{5} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$



$$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\pi + 2k\pi \| k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{k \frac{2\pi}{5} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Le 31 janvier 2012

EXTRI327 – FACS, ULB, Bruxelles, Juillet 2011.

Dans un cercle de rayon r, on trace une corde AB de longueur $2d < 2r$. Les tangentes au cercle en A et B se coupent en un point C.

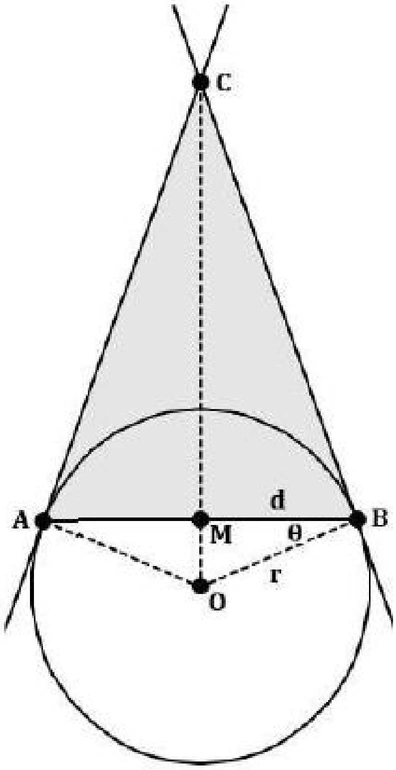
Calculer, en fonction de r et d :

(1) l'aire du triangle ABC ;
(2) le sinus de l'angle $\widehat{ACB}$.

Justifier.

Solution proposée par Jan Frans BROECKX

La figure ci-contre est un schéma de la situation.



(1) Aire du triangle

Le triangle ABC est isocèle, et les tangentes à un cercle sont perpendiculaires aux rayons au point de tangence. Donc :

$$\widehat{ACB} = \hat{C} = 2\theta \quad \text{avec} \quad \theta = M\hat{B}O = \text{Arccos}\,\frac{d}{r}$$

La figure montre que :

$$\text{Aire} = \frac{1}{2}.\,\|AB\|.\,\|MC\| = d.\,\|MC\| = d.\,\frac{d}{\tan\frac{\hat{C}}{2}} = \frac{d^2}{\tan\theta}$$

En utilisant la formule

$$\tan(\text{Arccos}\,x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad (x \in [-1;0[\,\cup\,]0;1])$$

dont la démonstration est donnée ci-dessous, on trouve :

$$\textbf{Aire} = \frac{d^2}{\tan\left(\text{Arccos}\,\frac{d}{r}\right)} = \frac{d^2\,\frac{d}{r}}{\sqrt{1-\frac{d^2}{r^2}}} = \frac{\mathbf{d^3}}{\sqrt{\mathbf{r^2-d^2}}}$$

(2) $\sin\widehat{ACB}$

$$\begin{aligned}\sin\widehat{ACB} &= \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \\ &= 2\sin\left(\text{Arccos}\,\frac{d}{r}\right).\cos\left(\text{Arccos}\,\frac{d}{r}\right) \\ &= 2\sqrt{1-\frac{d^2}{r^2}}.\frac{d}{r} \\ \sin\widehat{ACB} &= \frac{\mathbf{2d\sqrt{r^2-d^2}}}{\mathbf{r^2}}\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule bien connue

$$\sin(\text{Arccos}\,x) = \sqrt{1-\cos^2\text{Arccos}\,x} = \sqrt{1-x^2}$$

Le 31 janvier 2012

EXTRI328 – FACS, ULB, Bruxelles, Septembre 2011.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\mathbf{2\sin^2 5x + \sin^2 10x = 2}$$

Solution proposée par Jan Frans BROECKX

$$2\sin^2 5x + \sin^2 10x = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 5x + (2\sin 5x\cos 5x)^2 = 2(\sin^2 5x + \cos^2 5x)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2 5x\,.\cos^2 5x = 2\cos^2 5x$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 5x\,(2\sin^2 5x - 1) = 0$$

(a) $\cos^2 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 5x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \quad S_1 = \left\{\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(b) $2\sin^2 5x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 5x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 5x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \quad S_2 = \left\{\frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{10} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

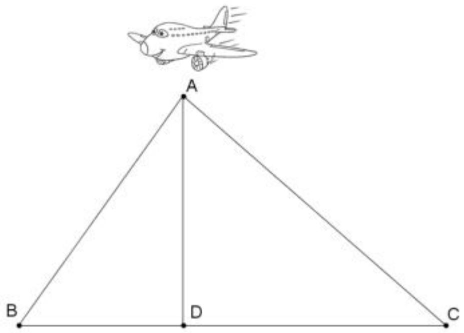
On voit que $S_1 \subset S_2$, et l'ensemble des solutions de l'équation est donc égal à S_2 :

$$S = \left\{\frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{10} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \{9° + k.18° \| k \in \mathbb{Z}\}$$

Le 31 janvier 2012

EXTRI329 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2011.

Deux observateurs, B et C distants de 1750 m sur une horizontale BC, observent au même instant une avion A dans le ciel. Cet avion est dans le plan vertical de la base d'observation BC et les angles d'élévation sont $\widehat{B} = 70°$ et $\widehat{C} = 84°$.
Quelle est la hauteur AD de l'avion par rapport aux deux observateurs s'il se trouve entre ceux-ci? (Arrondir au mètre le plus proche).



Quelle est la hauteur de l'avion?

Nous reprenons la solution proposée par l'université. Prof J.F.Debongnie et P. Duysinx.
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

Dans le triangle ADC, on a

$$AD = AC \sin \hat{C}$$

et dans le triangle ABC, on a

$$\frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}}$$

Il en résulte

$$AD = BC \frac{\sin \hat{B} \sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}$$

Enfin,

$$\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 180° - 70° - 84° = 26°$$

si bien que

$$AD = 1750 \frac{\sin(70°)\sin(84°)}{\sin(26°)} = 3731 m$$

---

1 février 2012