Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 37

EXTRI370-EXTRI379

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Octobre 2013

EXTRI370 – POLYTECH, Umons, Mons, septembre 2013.

Soit deux cercles concentriques de centre O et de diamètres respectifs D et D' (avec $D' < D$). Un observateur placé en O voit deux points A et B placés sur le cercle de plus grand diamètre sous un angle d'ouverture α inférieur à π rad. On désigne aussi par A' et B' deux points appartenant au cercle de plus petit diamètre, situés aux intersections avec les segments de droites OA et OB.

Pour aller de A à B, deux trajets sont possibles :

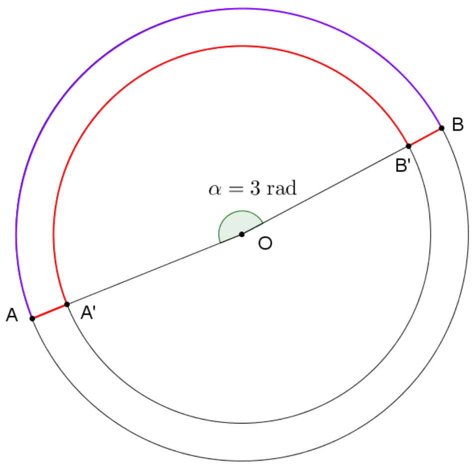
Trajet 1: de A à B le long de la circonférence du cercle extérieur;

Trajet 2: de A à B, en se déplaçant d'abord en ligne droite vers A', en empruntant le morceau de circonférence entre A' et B' le long du cercle inférieur, et enfin en se déplaçant en ligne droite de B' vers B.

Pour chaque trajet, on choisit la plus courte distance.

En supposant $D = 600$ m, $D' = 500$ m et $\alpha = 3$ rad, calculer la longueur du trajet le plus court.

Trouver ensuite une condition que l'angle α pour que les deux trajets soient de même longueur.



1) Trajet 1 : Arc $AB = \alpha R = 3 \times 300 = 900$ m

Trajet 2 : $\overline{AA'} + A'B' + + \overline{B'B} = 50 + 3 \times 250 + 50 = 850$ m

Le trajet 2 est donc plus court.

2) Il faut $AB = \overline{AA'} + A'B' + + \overline{B'B}$

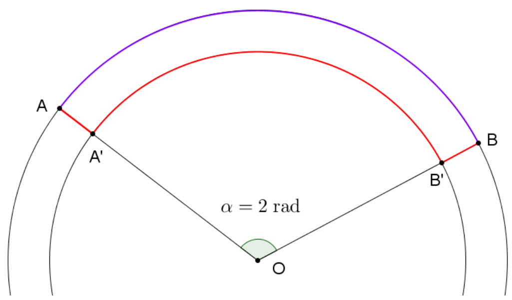
$\Rightarrow \alpha R = R - R' + \alpha R' + R - R'$

$\Rightarrow (R - R')\alpha = 2(R - R')$

$\Rightarrow \alpha = 2 \text{ rad } = 114.5916°$

Autrement dit α est indépendant des rayons R et R'.

Notons que l'on a alors $\overset{\frown}{AB} = 2 \times 300 = 600 = 2R$



EXTRI371 – FACS, ULB, Bruxelles, Juillet 2013.

Résoudre l'équation

$$2\sin 3x \sin 9x = 1$$

Solution proposée par Dominique Druez

Méthode 1

$2\sin 3x\sin 9x = 2\sin 3x\sin(6x+3x) = 2\sin 3x\,(\sin 6x\cos 3x + \sin 3x\cos 6x) =$
$2\sin 3x\cos 3x\sin 6x + 2\sin^2 3x\cos 6x = \sin^2 6x + 2\sin^2 3x\cos 6x = 1$
$\sin^2 6x + 2\sin^2 3x\cos 6x = \cos^2 6x + \sin^2 6x$
$2\sin^2 3x\cos 6x = \cos^2 6x$
$\cos 6x\,(2\sin^2 3x - \cos 6x) = 0$
$\cos 6x\,(2\sin^2 3x - \cos^2 3x + \sin^2 3x) = \cos 6x\,(3\sin^2 3x - \cos^2 3x) = 0$
$\cos 6x\,(3\,\mathrm{tg}^2\, 3x - 1) = \cos 6x\left(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, 3x - 1\right)\left(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, 3x + 1\right) = 0$

- $\cos 6x = 0$
  $6x = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}\ ou\ x = (2k+1)\frac{\pi}{12}$
- $\mathrm{tg}\, 3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
  $3x = \frac{\pi}{6} + k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}\ ou\ x = (6k+1)\frac{\pi}{18}$
- $\mathrm{tg}\, 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
  $3x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}\ ou\ x = (6k-1)\frac{\pi}{18}$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$
$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

Diviser par $\cos^2 3x$

Méthode 2

$2\sin 3x\sin 9x = 2\sin y\sin 3y = 2\sin y\,(3\sin y - 4\sin^3 y) = 1$ $8z^2 - 6z + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} (1)\ z = \frac{1}{4} \rightarrow \sin 3x = \pm\frac{1}{2} \\ (2)\ z = \frac{1}{2} \rightarrow \sin 3x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $(1)\ 3x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \rightarrow x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$ $(2)\ 3x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$	$y = 3x$ $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ $z = \sin^2 y$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

La forme de l'équation invite immédiatement à la transformer par la formule suivante

$$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

de transformation de produits en sommes ou différences ; on la démontre en retranchant les formules pour $\cos(a-b)$ et $\cos(a+b)$. L'équation devient alors (puisque $\cos(-a) = \cos a$) :

$$\cos 6x - \cos 12x = 1$$

Puisque $12x$ est le double de $6x$, on utilise la formule de duplication $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$, et au membre droit on remplace 1 par $\sin^2 a + \cos^2 a$:

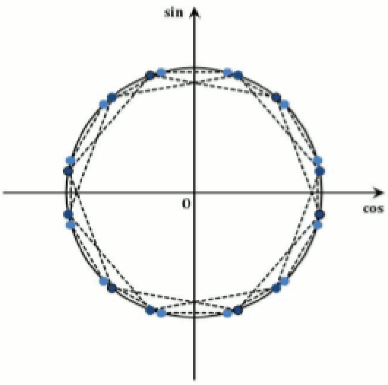
$$\cos 6x - (\cos^2 6x - \sin^2 6x) = \sin^2 6x + \cos^2 6x$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{\cos 6x\,(1 - 2\cos 6x) = 0}$$

L'équation est factorisé. Les solutions sont (avec $k \in \mathbb{Z}$) :

$$\cos 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}$$

$$\cos 6x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi & \Leftrightarrow \quad x = +\dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{\pi}{3} \\ \text{ou} & \\ 6x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi & \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$



Dans la figure à droite, les solutions sont reportées sur le cercle trigonométriques. Elles tombent sur les sommets d'un dodécagone régulier dont un des sommets est à 15°, et sur les sommets de deux hexagones réguliers dont un des sommets est 10° ou -10°.

L'ensemble des solutions est donc :

$$S = \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

7 février 2014. Modifié le 1 sept 2015 (Jan Frans Broeckx). Modifié le 14 janvier 2016 (Dominique Druez)

EXTRI372 – FACS, ULB, Bruxelles, Juillet 2013.

Sachant que :

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=a\\ \cos x+\cos y=b\end{cases}$$

Calculer : $\tan\dfrac{x+y}{2},\cos(x+y),\sin(x+y),\cos(x-y)$

Solution proposée par Dominique Druez

$$\begin{cases}(1)\ \sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=a\\ (2)\ \cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=b\end{cases}$$

$\sin p+\sin q=2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$$\frac{(1)}{(2)}=\frac{2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}{2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b}$$

$t=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$

$$\cos(x+y)=\frac{1-\dfrac{a^2}{b^2}}{1+\dfrac{a^2}{b^2}}=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$$

$\cos\alpha=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\sin(x+y)=\frac{2\dfrac{a}{b}}{1+\dfrac{a^2}{b^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$\sin\alpha=\dfrac{2t}{1+t^2},$

$$(1)^2+(2)^2=(\sin x+\sin y)^2+(\cos x+\cos y)^2=a^2+b^2$$
$$\sin^2 x+2\sin x\sin y+\sin^2 y+\cos^2 x+2\cos x\cos y+\cos^2 y=$$
$$2\sin x\sin y+2\cos x\cos y+2=a^2+b^2$$
$$\cos(x-y)=\frac{a^2+b^2}{2}-1$$

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

---

7 février 2014

EXTRI373 – FACS, ULB, Bruxelles, Juillet 2013.

Un pylône vertical, dont le pied est inaccessible, se dresse sur un sol horizontal.
Trois points *A*, *B*, *C* de ce sol horizontal sont distants respectivement de 40m, 50m et 60m du pied du pylône. Les angles sous lesquels on voit de ces trois points le sommet du pylône valent respectivement α,β,γ avec $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, quelle est la hauteur du pylône ?

Solution proposée par Dominique Druez

$$h = 40\,\text{tg}\,\alpha = 50\,\text{tg}\,\beta = 60\,\text{tg}\,\gamma$$

$$\gamma = 90° - (\alpha + \beta)$$

$$\text{tg}\,\gamma = \text{tg}[90° - (\alpha + \beta)] = \text{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta} \quad (1)$$

$$40\,\text{tg}\,\alpha = 50\,\text{tg}\,\beta \rightarrow \frac{4}{5}\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\beta$$

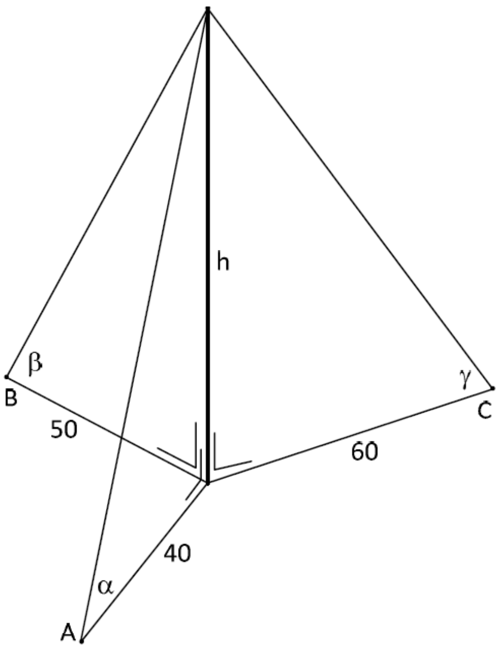
$$40\,\text{tg}\,\alpha = 60\,\text{tg}\,\gamma \rightarrow \frac{4}{6}\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\gamma$$

Remplaçons $\text{tg}\,\beta$ et $\text{tg}\,\gamma$ dans (1)

$$\frac{4}{6}\text{tg}\,\alpha = \frac{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \frac{4}{5}\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha + \frac{4}{5}\text{tg}\,\alpha} = \frac{1 - \frac{4}{5}\text{tg}^2\,\alpha}{\frac{9}{5}\text{tg}\,\alpha}$$

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{9}{5}\text{tg}^2\,\alpha + \frac{4}{5}\text{tg}^2\,\alpha = 1$$

$$2\,\text{tg}^2\,\alpha = 1 \rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow h = 20\sqrt{2}$$



---

7 février 2014

EXTRI374 – FACS, ULB, Bruxelles, Septembre 2013.

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x.\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{3}\cos x - \sin x$$

Solution proposée par Dominique Druez

$$\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$$

$$\sqrt{3}\cos 2x - \sqrt{3}\cos x + \sin 2x + \sin x = 0$$

$$-2\sqrt{3}\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$-2\sin\frac{3x}{2}(\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}) = -2\sin\frac{3x}{2}(\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 1)$$

- $\sin\frac{3x}{2} = 0$

  $\frac{3x}{2} = k\pi \rightarrow x = 2k\frac{\pi}{3}$

- $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

  $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \; ou \; x = (6k+1)\frac{\pi}{3}$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

Diviser par $\cos\frac{x}{2}$

---

7 février 2014

EXTRI375 – FACS, ULB, Bruxelles, Septembre 2013..

Quels sont les couples $(x;\ y)$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$.

Représenter graphiquement l'ensemble de ces points $(x;\ y)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Solution proposée par Dominique Druez

$$\sin(x+y) = \sin x \ + \sin y$$
$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\right) = 0$$
$$-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} = 0$$

- $\sin\frac{x+y}{2} = 0$

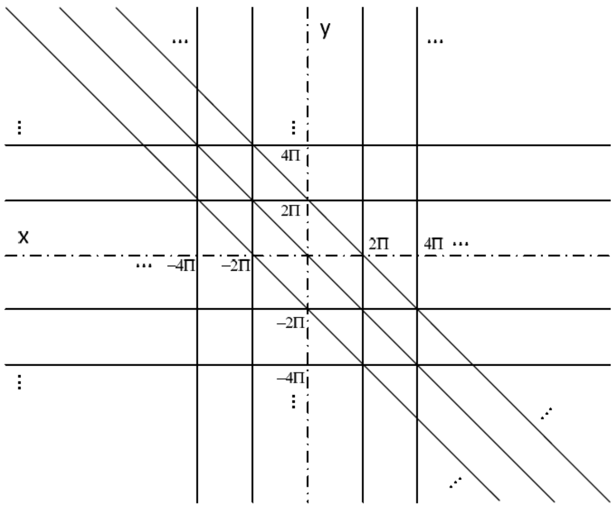
  $\frac{x+y}{2} = k\pi \rightarrow y = -x + 2k\pi$
- $\sin\frac{x}{2} = 0$

  $\frac{x}{2} = k\pi \rightarrow x = 2k\pi$
- $\sin\frac{y}{2} = 0$

  $\frac{y}{2} = k\pi \rightarrow y = 2k\pi$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$



---

7 février 2014

EXTRI376 – FACS, ULB, Bruxelles, Septembre 2013.

Un pylône vertical, dont le pied est inaccessible, se dresse sur un sol horizontal.
Deux points A et B, situés sur le sol, sont alignés avec le pied du pylône. Si la distance de A à B vaut d et si les angles sous lesquels on voit de ces deux points le sommet du pylône valent respectivement α et β, calculer la hauteur h du pylône en fonction de d, α et β.

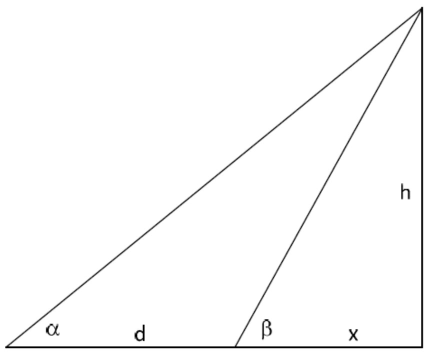
Solution proposée par Dominique Druez

$$\frac{h}{d+x} = \operatorname{tg}\alpha \ (1), \frac{h}{x} = \operatorname{tg}\beta \ (2) \to x = \frac{h}{\operatorname{tg}\beta}$$

Remplaçons x dans (1) :

$$\frac{h}{d+\frac{h}{\operatorname{tg}\beta}} = \operatorname{tg}\alpha \to \frac{h\operatorname{tg}\beta}{d\operatorname{tg}\beta + h} = \operatorname{tg}\alpha \to h\operatorname{tg}\beta = d\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha + h\operatorname{tg}\alpha$$

$$h = \frac{d\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$$



---

21 octobre 2013

EXTRI377 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

Vérifier l'identité suivante :

$$\frac{\sin 2a + \sin 5a - \sin a}{\cos 2a + \cos 5a + \cos a} = \tan 2a$$

$$\frac{\sin 2a + \sin 5a - \sin a}{\cos 2a + \cos 5a + \cos a} = \frac{\sin 2a + 2\cos 3a \sin 2a}{\cos 2a + 2\cos 3a \cos 2a} = \frac{\sin 2a\,(1 + 2\cos 3a)}{\cos 2a\,(1 + 2\cos 3a)} = \tan 2a$$

Rappels

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

---

16 mai 2015

EXTRI378 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

Résoudre l'équation suivante *sans calculatrice* :

$$\tan^2 x - 4\tan x + 1 = 0$$

$CE : x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

C'est une simple équation du second degré:

$$\tan x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Or $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

Donc pour $\tan x = 2+\sqrt{3}$

Notons que $2+\sqrt{3} > 0 \Rightarrow x \in Q_1$ ou Q_3

$$\tan 2x = \frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{1-\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = -\frac{2+\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} \cdot \frac{3-2\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}} = -\frac{6-4\sqrt{3}+3\sqrt{3}-6}{-3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow 2x = 150° + k180° \Rightarrow x = 75° + k90°$

Mais si k est impair alors $x \in Q_2$ ou Q_3, ce qui est à rejeter

$$\Rightarrow \boxed{x = 75° + k180° = \frac{5\pi}{12} + k\pi}$$

De même pour $\tan x = 2-\sqrt{3}$

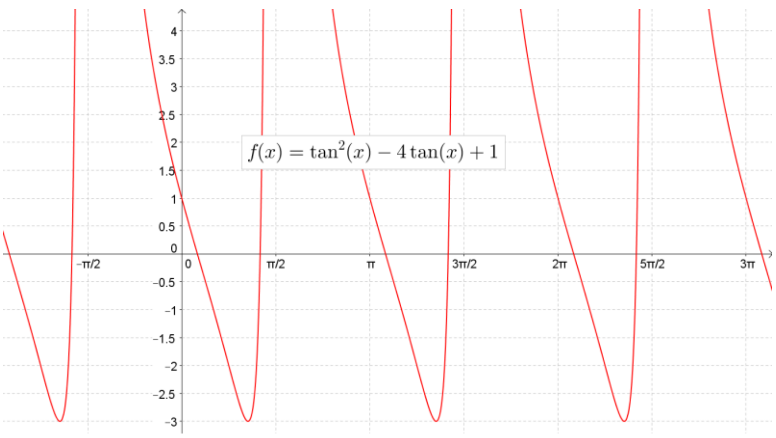
Notons que $2-\sqrt{3} > 0 \Rightarrow x \in Q_1$ ou Q_3

$$\tan 2x = \frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{1-\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = -\frac{2-\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}} \cdot \frac{3+2\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} = -\frac{6+4\sqrt{3}-3\sqrt{3}-6}{-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Rightarrow 2x = 30° + k180° \Rightarrow x = 15° + k90°$

Mais si k est impair alors $x \in Q_2$ ou Q_3, ce qui est à rejeter

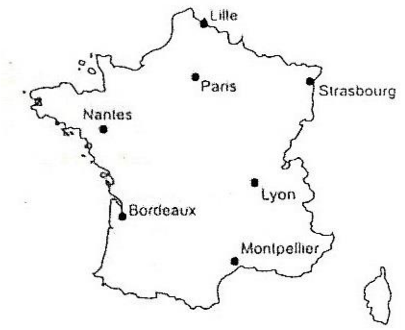
$$\Rightarrow \boxed{x = 15° + k180° = \frac{\pi}{12} + k\pi}$$



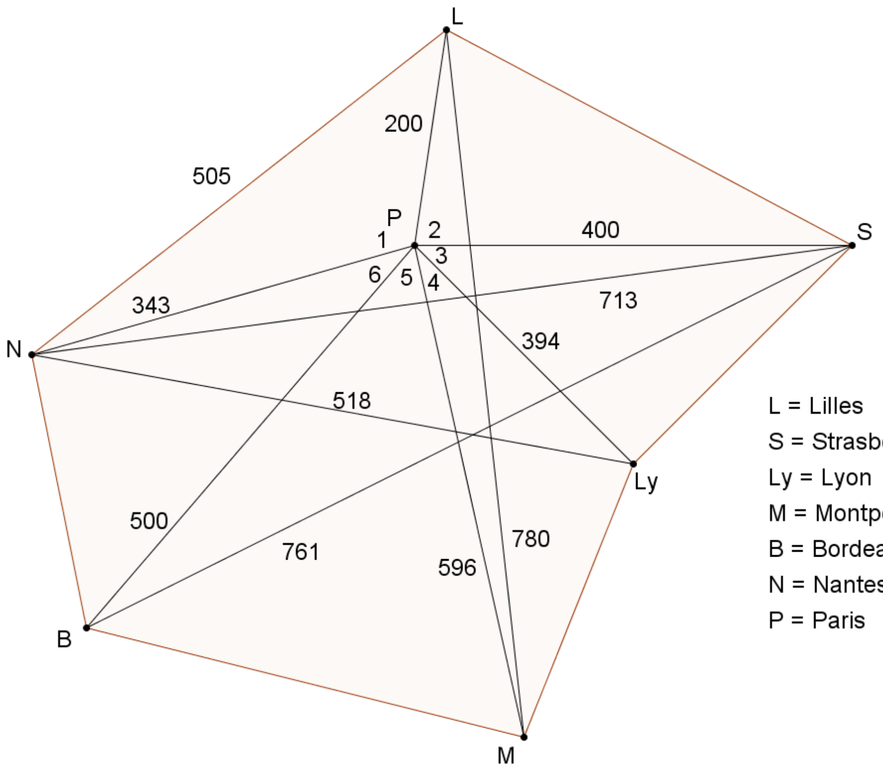
15 mai 2014

EXTRI379 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

On connait les distances ci-dessous entre les villes ainsi que leur situation géopgraphique.
On suppose une Terre plane.
Calculer la longueur à vol d'oiseau du parcours du tour de France partant de Paris et passant successivement par les villes de Lilles, Strasbourg, Lyon, Montpellier, Bordeaux, Nantes et Paris. Utiliser 4 chiffres après la virgule dans les calculs.



Paris - Lille	200 km
Nantes - Lille	505 km
Montpellier - Lille	780 km
Paris - Strasbourg	400 km
Strasbourg - Nantes	713 km
Paris - Lyon	394 km
Nantes - Lyon	518 km
Paris - Montpellier	596 km
Paris - Bordeaux	500 km
Strasbourg - Bordeaux	761 km
Paris - Nantes	343 km



L = Lilles
S = Strasbourg
Ly = Lyon
M = Montpellier
B = Bordeaux
N = Nantes
P = Paris

$$P_1 = \cos^{-1}\left(\frac{200^2 + 343^2 - 505^2}{2 \times 200 \times 343}\right) = 135.2136°$$

$$P_{3456} = \cos^{-1}\left(\frac{343^2 + 400^2 - 713^2}{2 \times 343 \times 400}\right) = 147.2264°$$

$$P_2 = 360° - P_1 - P_{3456} = 77.5600°$$

$$\overline{LS} = \sqrt{200^2 + 400^2 - 2 \times 200 \times 400 \times \cos 77.5600°} = 406.8577$$

$$P_{456} = \cos^{-1}\left(\frac{343^2 + 394^2 - 518^2}{2 \times 343 \times 394}\right) = 89.0331°$$

$$\widehat{P_3} = \widehat{P_{3456}} - \widehat{P_{456}} = 147.2264° - 89.0331° = 58.1933°$$

$$\overline{SL_y} = \sqrt{400^2 + 394^2 - 2 \times 400 \times 394 \times \cos 58.1933°} = 386.1453$$

$$\widehat{P_{345}} = \cos^{-1}\left(\frac{518^2 + 400^2 - 780^2}{2 \times 518 \times 400}\right) = 115.7564°$$

$$\widehat{P_{45}} = \widehat{P_{345}} - \widehat{P_{45}} = 115.7564° - 58.1933° = 57.5631°$$

$$\widehat{P_6} = \widehat{P_{456}} - \widehat{P_{45}} = 89.0331° - 57.5631° = 31.4700°$$

$$\overline{NB} = \sqrt{343^2 + 500^2 - 2 \times 343 \times 500 \times \cos 31.4700} = 274.0429$$

$$\widehat{P_{234}} = \cos^{-1}\left(\frac{200^2 + 596^2 - 780^2}{2 \times 200 \times 596}\right) = 153.4095°$$

$$\widehat{P_4} = \widehat{P_{234}} - \widehat{P_2} - \widehat{P_3} = 153.4095° - 77.5600° - 58.1933° = 17.6562°$$

$$\widehat{P_5} = \widehat{P_{45}} - \widehat{P_4} = 57.5631° - 17.6562° = 39.9069°$$

$$\overline{LyM} = \sqrt{596^2 + 394^2 - 2 \times 596 \times 394 \times \cos 17.6562°} = 384.7491$$

$$\overline{MB} = \sqrt{500^2 + 596^2 - 2 \times 500 \times 596 \times \cos 39.9069°} = 384.7491$$

$$TOTAL = 2207.6482 \text{ km}$$

2 juin 2014