Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 38

EXTRI380-EXTRI389

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Mai 2014

EXTRI380 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

Vérifier l'identité et préciser les conditions d'existence :

$$\frac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{\tan(a+b)-\tan(a-b)}=\frac{\tan a\left(1+\tan^2 b\right)}{\tan b\left(1+\tan^2 a\right)}$$

CE :

$$\left.\begin{array}{l}
\tan a \Rightarrow a \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\
\tan b \Rightarrow b \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\
1+\tan^2 a \neq 0 \Rightarrow \text{ toujours vérifié} \\
\left.\begin{array}{l}
\tan(a+b) \neq 0 \Rightarrow a+b \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\
\tan(a-b) \neq 0 \Rightarrow a-b \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi
\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ b \neq k\pi \end{cases} \\
\tan(a+b)-\tan(a-b) \neq 0 \Rightarrow a+b \neq a-b+k\pi \Rightarrow b \neq \dfrac{k\pi}{2}
\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ b \neq k\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Modifions le membre de gauche en tenant compte que $\begin{cases} \tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y} \\ \tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y} \end{cases}$

$$\frac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{\tan(a+b)-\tan(a-b)}=\frac{\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}+\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}}{\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}-\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}}$$

$$=\frac{(\tan a+\tan b)(1+\tan a\tan b)+(\tan a-\tan b)(1-\tan a\tan b)}{(\tan a+\tan b)(1+\tan a\tan b)-(\tan a-\tan b)(1-\tan a\tan b)}$$

On développe et on simplifie pour arriver à

$$\frac{2\tan a+2\tan a\tan^2 b}{2\tan b+2\tan^2 a\tan b}=\frac{\tan a\left(1+\tan^2 b\right)}{\tan b\left(1+\tan^2 a\right)}$$

EXTRI381 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

Vérifier l'identité et préciser les conditions d'existence:

$$\tan(a+b) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a\cos a - \sin b\cos b}$$

CE :

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a+b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 2)\ \sin a\cos a \neq \sin b\cos b \Rightarrow \sin 2a \neq \sin 2a \\ \qquad \Rightarrow \begin{cases} 2a \neq 2b + k\pi \\ 2a \neq \pi - 2b + k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b \neq k\dfrac{\pi}{2} \\ a+b \neq \dfrac{\pi}{2} + k\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ b \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Modifions le membre de droite. (Les formules sont rappelées en-dessous)

$$\frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a\cos a - \sin b\cos b} = \frac{\dfrac{1-\cos 2a}{2} - \dfrac{1-\cos 2b}{2}}{\dfrac{1}{2}\sin 2a - \dfrac{1}{2}\sin 2b} = \frac{\cos 2b - \cos 2a}{\sin 2a - \sin 2b}$$

$$= -\frac{\sin(b+a)\sin(b-a)}{\cos(a+b)\sin(a-b)} = \tan(a+b)$$

Rappels:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

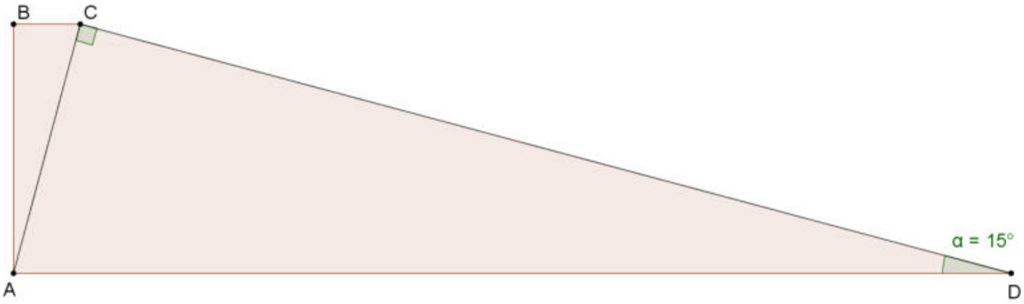
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Le 15 mai 2014

EXTRI382 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

Un des angles d'un trapèze rectangle *ABCD* vaut 15°. La plus petite diagonale vaut 7 centimètres et est perpendiculaire au côté oblique. Calculer le périmètre et l'aire du trapèze. Utiliser 4 chiffres derrière la virgule dans les calculs.



$BAC = CDA = 15°$ car angles à côtés perpendiculaires.

$\overline{AB} = \overline{AC}.\cos 15° = 6.7615$

$\overline{BC} = \overline{AC}.\sin 15° = 1.8117$

$\overline{CD} = \overline{AC}.\tan 75° = 26.1244$

$\overline{AD} = \dfrac{\overline{AC}.}{\cos 75°} = 27.0459$

Périmètre : $p = 61.7435$

Aire : $A = \dfrac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2}.\overline{AB} = \dfrac{1.8117 + 27.049}{2}.6.7615 = 97.5603$

---

15 mai 2014

EXTRI383 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

Soit l'équation suivante :

$$\sqrt{2\tan x+1}=\frac{2}{\cos^2 x}-2\tan^2 x-\tan x$$

a) Donner les conditions d'existence.

b) Résoudre l'équation.

c) Tracer les solutions entre $[0,2\pi]$ sur le cercle trigonométrique

---

CE :

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ 2)\ 2\tan x+1\geq 0\Rightarrow\tan x\geq-\dfrac{1}{2} \\ 3)\ \dfrac{2}{\cos^2 x}\geq 2\tan^2 x+\tan x\Rightarrow 2+2\tan^2 x\geq 2\tan^2 x+\tan x\Rightarrow\tan x\leq 2 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x\in\left[-0.46365+k\pi,1.1071+k\pi\right[\ \text{ avec } k\in\mathbb{Z}$$

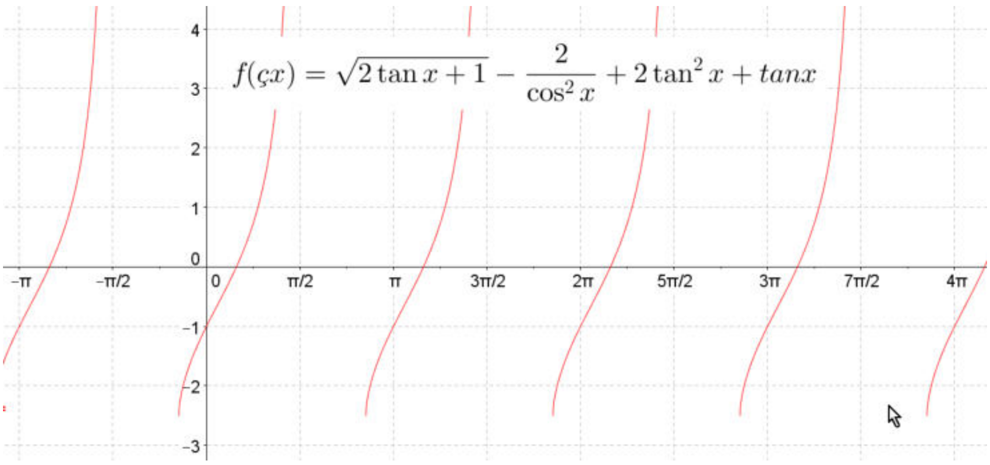
$$\sqrt{2\tan x+1}=\frac{2}{\cos^2 x}-2\tan^2 x-\tan x \qquad \text{or} \qquad 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow\sqrt{2\tan x+1}=2+\cancel{2\tan^2 x}-\cancel{2\tan^2 x}-\tan x$$

$$\Rightarrow 2\tan x+1=4-4\tan x+\tan^2 x\Rightarrow\tan^2 x-6\tan x+3=0$$

$$\Rightarrow\tan x=3\pm\sqrt{6}\Rightarrow\begin{cases}x=1.3893 & \text{à rejeter}\\ x=0.50323+k\pi\end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{x=0.50323+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}}$



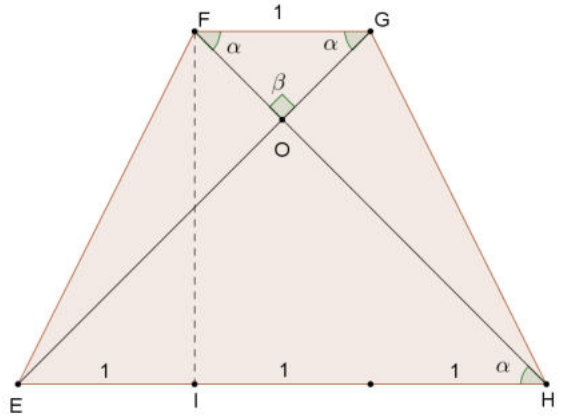
15 mai 2014

EXTRI384 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014.

On considère un trapèze *isocèle* $EFGH$.
La longueur de la grande base EH est égale à 3 m et celle de la petite base, FG, est égale à 1 m.
L'aire de ce trapèze est égale à 4 m$^{2.}$

1. Représentez schématiquement le quadrilatère, en indiquant clairement les notations introduites dans l'énoncé ainsi que les variables que vous utiliserez dans vos calculs.
2. Soit O, le point d'intersection des diagonales du trapèze, indiquez ce point sur la figure que vous avez dessinée précédemment. Calculez la distance de ce point à la petite base.
3. Du sommet G du trapèze, on abaisse une perpendiculaire à la diagonale FH. Soit K, le point d'intersection de cette perpendiculaire avec FH. Représentez ces éléments sur la figure et calculer le rapport GK / KH.

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$h = FI,\quad \overline{EI} = 1,\quad S = 4\text{ m}^2 = \frac{(1+3)h}{2} \Rightarrow h = 2\text{ m}$$

$$\overline{EF} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}\text{ m},\quad \tan\alpha = \frac{\overline{FI}}{\overline{IH}} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}; \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow K \equiv O$$

Les triangles FGO et HEO sont semblables, $k = 1/3$.

$\Rightarrow$ distance de O à $FG = 1/3$ distance de O à EH.

Puisque $FI = 2$, distance de O à $FG = 2/4 = 1/2$ m

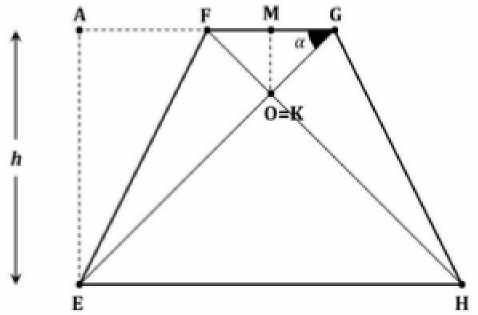
$$\frac{\overline{GO}}{\overline{OH}} = \frac{1}{3} \text{ car } 3\overline{GO} = \overline{OH} \quad (k = 1/3)$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

1) Soit h la distance entre la grande base et la petite base du trapèze. Alors son aire S est égale à :

$$S = \frac{\overline{EH} + \overline{FG}}{2} . h \qquad \Rightarrow \quad h = \frac{2S}{\overline{EH} + \overline{FG}} = \frac{2.4}{3+1} = 2 \text{ m}$$

et la figure du trapèze, à l'échelle, est alors :



2) Soit A l'intersection de la perpendiculaire à la grande base en E avec la droite portant la petite base. Le triangle EAF est rectangle en A, et donc :

$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{EA}^2 + \overline{AF}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ m}$$

3) Soit α l'angle FGE :

$$\tan \alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{AM}} = \frac{2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45°$$

$$\Rightarrow \quad \overline{OM} = \overline{MG} = \frac{\overline{FG}}{2} = 0{,}5 \text{ m}$$

4) Le pied K de la perpendiculaire à FG issue de G coïncide avec le point d'intersection O des diagonales, puisque celles-ci font des angles de $\pm 45°$ avec la direction des bases, et sont donc perpendiculaires. Le triangle GMO étant similaire au triangle GAE, on a que :

$$\frac{\overline{GK}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{GO}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{MO}}{h - \overline{MO}} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3}$$

14 septembre 2014

EXTRI385 – – EPL, UCL, LLN, juillet 2014.

On demande de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ \sqrt{2}\sin x \sin y + 1 = 0 \end{cases}$$

et de représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

---

Solution proposée par Nicole Berckmans

Remarquons que $\sqrt{2}\sin x \sin y + 1 = 0$ est une équation symétrique en x et y.

On a : $\sqrt{2}\sin x.\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin x.\dfrac{\sqrt{2}}{2}.(\cos x - \sin x) + 1 = 0$

$\Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

$\Rightarrow \cos x(\sin x + \cos x) = 0$

1) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

2) $\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \tan x + 1 = 0 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Sur le cercle trigonométrique $[0, 2\pi]$

$$\left.\begin{array}{l} \left[x = \dfrac{\pi}{2}, y = -\dfrac{\pi}{4}\right] \\ \left[x = \dfrac{3\pi}{2}, y = -\dfrac{5\pi}{4}\right] \\ \left[x = \dfrac{7\pi}{4}, y = -\dfrac{3\pi}{2}\right] \\ \left[x = \dfrac{3\pi}{4}, y = -\dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}\right\}$$

Il n'y a pas de couple (x, y) tels que x et y appartiennent tous les deux à $[0, 2\pi]$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Remarquez tout d'abord que le système est symétrique en x et y ; par conséquent, pour toute solution $(x,y)=(a,b)$ trouvée, le couple $(x,y)=(b,a)$ sera également une solution.

De la première équation on tire

$$y=\frac{\pi}{4}-x$$

ce qu'on remplace dans la deuxième équation, qu'on résout ensuite pour x :

$$\sqrt{2}\sin x\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}\sin x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)+1=0 \qquad \left(\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin x\cos x-\sin^2 x+(\sin^2 x+\cos^2 x)=0$$

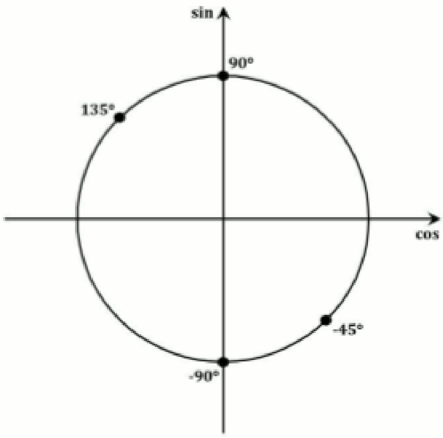
$$\Leftrightarrow\quad (\sin x+\cos x)\cos x=0$$

a) $\cos x=0$

$$\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ et } y=-\frac{\pi}{4}-k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

b) $\sin x+\cos x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos x=-\sin x$

$$\Leftrightarrow\quad x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ et } y=\frac{\pi}{2}-k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$



L'ensemble des solutions du système est donc :

$$S=\left\{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\,-\frac{\pi}{4}-k\pi\right)\middle\|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}-k\pi\right)\middle\|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$$

14 septembre 2014

EXTRI386 – – EPL, UCL, LLN, juillet 2014.

Cochez chaque fois l'unique affirmation vraie parmi les trois possibilités.

Réponse juste = 1 point, autre réponse = 0

- Dans un triangle ABC de côtés a, b et c (opposés aux angles respectifs A, B et C) d'aire S, on a $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} =$

  $\frac{S}{2abc}$ ☐ $\frac{S}{abc}$ ☐ $\frac{2s}{abc}$ ☐

- Dans l'intervalle $0 < x < \pi$, l'équation $\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 2x = 0$ admet exactement

  0 solution ☐ 1 solution ☐ 2 solutions ☐

- L'expression $1 - 8\cos^2 \sin^2 a$ est identiquement égale à

  $\cos 2a$ ☐ $\cos 4a$ ☐ $\cos 8a$ ☐

- Dans un triangle ABC, si $\cos^2(A-B) - \cos 2B = \frac{1}{2}$, alors

  $C = 90°$ ☐ $C = 60°$ ou $C = 120°$ ☐ $C = 45°$ ou $C = 135°$ ☐

Solution proposée par Nicole Berckmans

1) Rép : $\frac{2S}{abc}$. En effet prenons un triangle rectangle isocèle d'hypothénuse a et de côtés de l'angle droit b. On a $a^2 = 2b^2$, $S = \frac{b^2}{2}$ et $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2}/2}{b}$

D'autre part : $\frac{2S}{abc} = \frac{2b^2/2}{abb} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{2S}{abc} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

2) Rép : 0 solution.

La somme de 2 carrés est nul si chacun est nul.

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots \\ \cos 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow S = \varnothing$$

3) Rép $\cos 4a$

$1 - 8\cos^2 a \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 2a = \cos 4a$ (Carnot)

4) $\cos^2(a-b) - \cos 2a \cos 2b = \frac{1}{2}$

$(\cos a \cos b + \sin a \sin b)^2 - (\cos^2 - \sin^2 a)(\cos^2 b - \sin^2 b) = \frac{1}{2}$

.....

$$(\cos a \sin b + \sin a \cos b)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin(a+b) = \pm \sqrt{2}/2 \\ \text{Or } \sin(a+b) = \sin c \text{ car } c = 180° - (a+b) \end{cases}$$

$\Rightarrow \sin c = \pm \sqrt{2}/2 \Rightarrow c = 45°$ ou $135°$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Dans un triangle ABC de côtés a, b et c et d'aire S, on a :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\mathbf{2S}}{\boldsymbol{abc}}$$

parce-que la formule pour l'aire du triangle ABC est $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$.

Dans l'intervalle $0 < x < \pi$, l'équation $\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 2x = 0$ admet exactement **0 solutions**, parce-que :

$$\begin{aligned}
\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 2x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2 x + \frac{1}{4}(2\cos^2 x - 1)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos^2 x + \frac{1}{4}(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos^2 x + \frac{1}{4} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos^2 x = -\frac{1}{4} \qquad \text{Impossible !}
\end{aligned}$$

L'expression $1 - 8\cos^2 a \sin^2 a$ est identiquement égale à $\mathbf{\cos 4}\boldsymbol{a}$, parce-que :

$$1 - 8\cos^2 a \sin^2 a = 1 - 2(2\sin a \cos a)^2 = 1 - 2\sin^2 2a = \cos 4a$$

Dans un triangle ABC, si $\cos^2(A - B) - \cos 2A \cos 2B = \frac{1}{2}$, alors $\mathbf{C = 45°}$ **ou** $\mathbf{C = 135°}$, parce-que :

$$\begin{aligned}
\cos^2(A - B) - \cos 2A \cos 2B = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 2\left(\cos^2(A - B) - \frac{1}{2}\right) - 2\cos 2A \cos 2B = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2\cos^2(A - B) - 1) - 2\cos 2A \cos 2B = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\big(2(A - B)\big) - 2\cos 2A \cos 2B = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos 2A \cos 2B + \sin 2A \sin 2B - 2\cos 2A \cos 2B = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sin 2A \sin 2B - \cos 2A \cos 2B = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\big(2(A + B)\big) = 0
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{array}{ccc}
2(A + B) = 90° & \text{ou} & 2(A + B) = 270° \\
A + B = 45° & \text{ou} & A + B = 135° \\
C = 180° - 45° = 135° & \text{ou} & C = 180° - 135° = 45°
\end{array}$$

---

14 septembre 2014

EXTRI387 – – EPL, UCL, LLN, juillet 2014.

1) Répondez à la question 1a) ou 1b), en donnant le développement qui mêne à la réponse.

   1a) Un but de football a une largeur l et une hauteur h connues. Un joueur dispose d'un angle de tire[1] au but au raz du sol égal à α et il remarque que la distance qui le sépare du second poteau vaut le double de la distance d qui le sépare du premier poteau. Exprimez d en fonction de l et α.

   1b) Soit FBC un triangle dont l'angle F vaut α et dont le côté BC est de longueur l. La longueur d du côté FB vaut la moitié de la longueur du côté FC. Exprimez d en fonction de l et α.

2) Répondez à la question 2a) ou 2b), en donnant le développement qui mêne à la réponse.

   2a) Le joueur se trouve maintenant face au but à égale distance des deux poteaux et dispose d'un angle de tir β sur la barre transversale. Exprimez la distance x qui sépare le joueur de la ligne de but en fonction de l, h et β

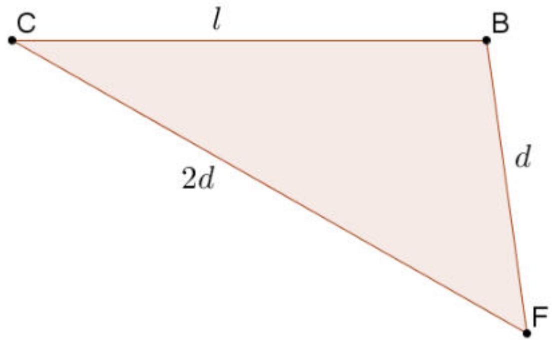
   2b) Un triangle ABC, isocèle en A, est tracé sur le sol horizontal. On considère un rectangle vertical $BCDE$ de longueur l et de hauteur h. Soit β l'angle DAE. Exprimez la distance x entre A et la droite BC en fonction de l, h et β

3) Calculer d et x au cm près pour les données suivantes : $l = 7.32$ m, $h = 2.44$ m, $\alpha = 20°, \beta = 20°$.

– – – – – – – – – – – – –

[1] L'angle de tir sur un segment AB à partir d'un point C est l'angle ACB

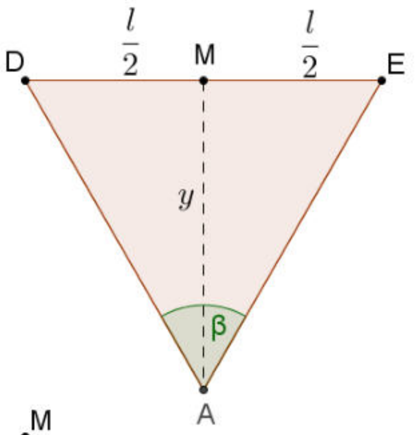
Solution proposée par Nicole Berckmans



$$l^2 = d^2 + 4d^2 - 4d^2 \cos\alpha$$

$$\frac{l^2}{d^2} = 5 - 4\cos\alpha$$

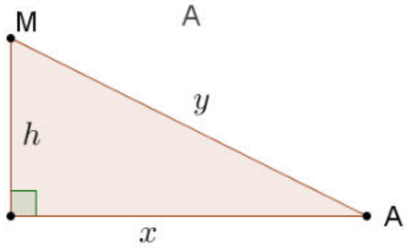
$$d = \frac{l}{\sqrt{5 - 4\cos\alpha}} = 6.57 \text{ m}$$



$$\tan\frac{\beta}{2} = \frac{l/2}{x}$$

$$y = \frac{l}{2\tan\frac{\beta}{2}}$$

$$y^2 = x^2 + h^2$$



$$x^2 = \frac{l^2}{4\tan^2\beta/2} - h^2$$

$$x = 20.61\ \mathrm{m}$$

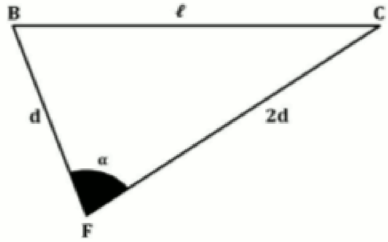
Solution proposée par Jan Frans Broeckx

1) Les questions 1a) et 1b) sont deux formulations équivalentes du même problème.

Application du théorème d'Al Kashi donne :

$$\begin{aligned} \ell^2 &= d^2 + (2d)^2 - 2d(2d)\cos\alpha \\ &= 5d^2 - 4d^2\cos\alpha \\ &= (5 - 4\cos\alpha)d^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{\ell}{\sqrt{5 - 4\cos\alpha}}$$



2) Les questions 2a) et 2b) sont deux formulations équivalentes du même problème.

Soit M le milieu de BC. Le triangle horizontal AMC est rectangle en M, donc :

$$x^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \tfrac{1}{4}\ell^2$$

Le triangle vertical ACD est rectangle en C, donc :

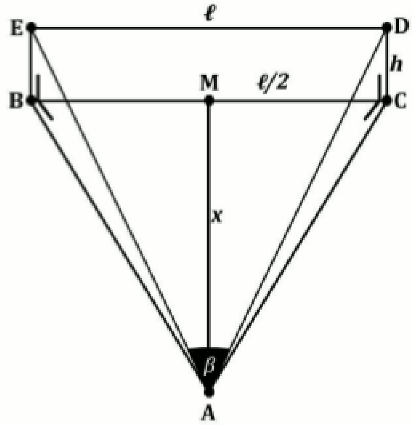
$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 - h^2$$

et donc : $x^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 - \tfrac{1}{4}\ell^2 - h^2$

Le triangle oblique DAE est isocèle en A, c'est-à-dire $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{AD}}$. Le théorème d'Al Kashi donne alors :

$$\ell^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{AE}}^2 - 2\overline{\mathrm{AD}}\,\overline{\mathrm{AE}}\cos\beta = 2(1-\cos\beta)\overline{\mathrm{AD}}^2$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\mathrm{AD}}^2 = \frac{\ell^2}{2(1-\cos\beta)}$$



$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{\ell^2}{2(1-\cos\beta)} - \tfrac{1}{4}\ell^2 - h^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\left(\frac{1}{2(1-\cos\beta)} - \frac{1}{4}\right)\ell^2 - h^2}$$

3) Avec $\ell = 7{,}32$ m, $h = 2{,}44$ m, $\alpha = 20°$ et $\beta = 20°$:

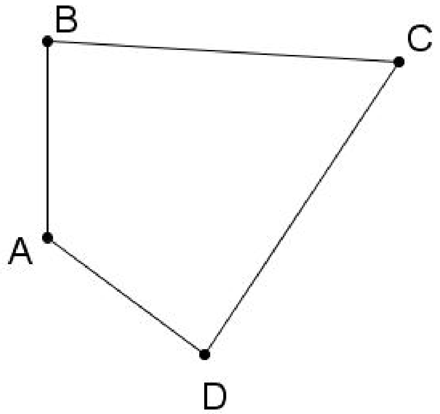
$$d = \frac{7{,}32}{\sqrt{5 - 4\cos 20°}} = 6{,}57 \text{ m}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2(1-\cos 20°)} - \frac{1}{4}\right)(7{,}32)^2 - (2{,}44)^2} = 20{,}61 \text{ m}$$

14 septembre 2014

EXTRI388 – – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

Considérons un quadrilatère $ABCD$ représenté schématiquement ci-dessous.



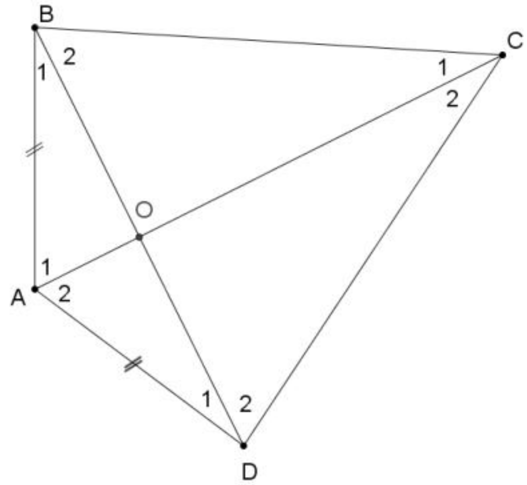
On précise que, dans ce quadrilatère :

- les côtés AB et AD sont de même longueur,
- les angles aux sommets B et D sont de même mesure.

Dans le cas particulier où la longueur de côté AB est égale à 1 m et l'angle au sommet A est de 120°,

1. Exprimez la longueur de la diagonale AC en fonction de l'angle au sommet C.
2. Si la longueur de la diagonale AC est de 2 m, quelle est la valeur de l'angle au sommet C ?
3. Dans ce cas, calculez la surface et le périmètre du quadrilatère.

Solution proposée par Nicole Berckmans



1) Le triangle *ABD* étant isocèle, $B_1 = D_1$. Puisque $B_{12} = D_{12}$ le triangle *CDB* est aussi isocèle. Les points *A* et *C* étant tous les deux à égale distance de *B* et *D*, la droite *AC* est médiatrice du segment *BD*.

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = {}^{120°}\!/_{2} = 60°, \quad \widehat{B_1} = \widehat{D_1} = 30°$$

Dans le triangle *OAC* : $\overline{AO} = \sin 30° = {}^1\!/_2$ et $\overline{BO} = \sin 60° = {}^{\sqrt{3}}\!/_2$.

Dans le triangle *OBC* : $\tan \widehat{C_1} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OC}}$; $\overline{OC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\tan \widehat{C_1}}$

$$\Rightarrow \quad \overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\tan \widehat{C_1}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cot \frac{\widehat{C_{12}}}{2}$$

2) Si $\overline{AC} = 2$ m, alors $2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2\tan \widehat{C_1}} \Rightarrow 4 = 1 + \sqrt{3}\cot \widehat{C_1}$

$$\Rightarrow \cot \widehat{C_1} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{C_1} = 30° \Rightarrow \widehat{C_{12}} = 60°$$

3) Surface :

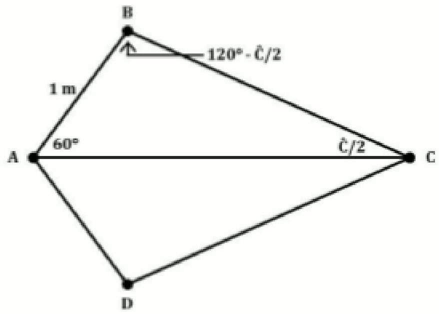
$$\left.\begin{aligned} \Delta ABD &= \frac{1}{2}\overline{BD}.\overline{AO} \\ \Delta CBD &= \frac{1}{2}\overline{BD}.\overline{OC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\overline{BD}\,\overline{AC} = \frac{1}{2}\times\left(2\times\overline{BO}\right)\times 2 = \sqrt{3}$$

Périmètre : $2(AB + BC) = 2\left(1+\sqrt{3}\right)$

$$\text{car} \quad \left.\begin{aligned} \sin \widehat{C_1} &= \sin 30° = \frac{1}{2} \\ \sin \widehat{C_1} &= \frac{\overline{OB}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{3}}{2\overline{BC}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{3}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

1) Etant donné que $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\hat{B} = \hat{C}$ et que le côté AC est commun, les triangles ABC et ADC sont isométriques. Avec $\overline{AB} = 1$ m et $\hat{A} = 120°$, la situation est comme montré ci-dessous.



Règle aux sinus dans ABC :

$$\frac{1}{\sin\frac{\hat{C}}{2}} = \frac{\overline{AC}}{\sin\left(120° - \frac{\hat{C}}{2}\right)} \quad \Rightarrow$$

$$\overline{AC} = \frac{\sin\left(120° - \frac{\hat{C}}{2}\right)}{\sin\frac{\hat{C}}{2}}$$

$$= \frac{\sin 120° \cos\frac{\hat{C}}{2} - \cos 120° \sin\frac{\hat{C}}{2}}{\sin\frac{\hat{C}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cot\frac{\hat{C}}{2} + \frac{1}{2}$$

2) Avec $\overline{AC} = 2$ m :

$$\cot\frac{\hat{C}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\overline{AC} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{3}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\frac{\hat{C}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{C}}{2} = 30° \quad \Leftrightarrow \quad \hat{C} = 60°$$

3) $\hat{B} = 90° \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ m

Aire ABCD $= 2(\text{Aire ABC}) = 2\left(\frac{1}{2}1\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$ m^2

Périmètre ABCD $= 2(\sqrt{3} + 1)$ m

14 septembre 2014

EXTRI389 – – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

Soient deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ (x étant une variable réelle) définies par :

$$f_1(x) = (1+\sin^2 x)\cos x + \left(\sqrt{3}\cos^2 x - 1\right)\sin x$$

$$f_2(x) = \cos - \sin x$$

Pour des valeurs de x comprises dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$ le rapport $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ est-il strictement supérieur à un?

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$1 < \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{(1+\sin^2 x)\cos x + \left(\sqrt{3}\cos^2 x - 1\right)\sin x}{\cos x - \sin x}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x} + \frac{\sin x \cos x\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right)}{\cos x - \sin x}$$

$$\Rightarrow 0 < \sin x \cos x \frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{\cos x - \sin x}$$

$$\begin{cases} \sin x + \sqrt{3}\cos x \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \\ \cos - \sin x = 0 \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

x	$-\pi$		$-3\pi/4$		$-\pi/2$		$-\pi/3$		0		$\pi/4$		$\pi/2$		$2\pi/3$		π
$\sin x$	0	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+	0
$\cos x$	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−
$\sin x + \sqrt{3}\cos x$	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+	0	−	−
$\cos x - \sin x$	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	−
	0	+	/	−	0	+	0	−	0	+	/	−	0	+	0	−	0

Conclusion : $\boxed{x \in \left]-\pi, -\dfrac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{3}\right[\cup \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right[}$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

C'est une inéquation, qu'on peut transformer comme suit :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \equiv \frac{f_1(x) - f_2(x)}{f_2(x)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{\sin x \cos x \left(\sin x + \sqrt{3} \cos x\right)}{\cos x - \sin x} > 0$$

Conditions d'existence :

$f(x)$ n'existe pas si $\sin x = \cos x$, c'est-à-dire pour $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = -\frac{3\pi}{4}$ (dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$).

Racines du numérateur (dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$) :

- $\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ et $x = \pm\pi$
- $\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{2}$
- $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = -\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{3}$ et $x = \frac{2\pi}{3}$

Tableau des signes :

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sin x$	0	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+	0
$\cos x$	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−
$\sin x + \sqrt{3}\cos x$	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+	0	−	−
$\cos x - \sin x$	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	−
$f(x)$	0	+	|	−	0	+	0	−	0	+	|	−	0	+	0	−	0

Solution :

$$S = \left]-\pi\,;\,-\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,-\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{2\pi}{3}\right[$$