Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 39

EXTRI390-EXTRI399

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Septembre 2014

EXTRI390 – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

Cochez chaque fois l'unique affirmation vraie parmi les trois possibilités.

Réponse juste $=1$ point, autre réponse $=0$.

- Dans un triangle équilatéral, le rapport entre les rayons des cercles circonscrit et inscrit est égal à :

  $\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{3}$ ☐ 2 ☐

- Dans l'intervalle $0 < x < \frac{\pi}{2}$, l'équation $\sin 2x + \sin 6x = 0$ admet exactement

  0 solution ☐ 1 solution ☐ 3 solutions ☐

- Pour tout α dans l'intervalle $\left]0, \pi\right[$, l'expression $\sin\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right)$ est égale à

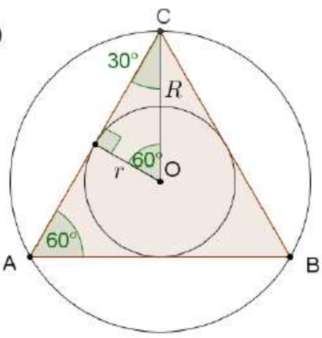
  $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2-2\cos\alpha}}$ ☐ $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{5-2\cos\alpha}}$ ☐ $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{5-4\cos\alpha}}$ ☐

- Soit ABC un triangle isocèle en A, D un point du segment BC, et E un point du segment AC, tels que le triangle CDE est rectangle en D et que l'aire du triangle CDE vaut le tiers de l'aire du triangle ABC, alors $\frac{|BC|}{|DC|}$ est égal à

  $\sqrt{6}$ ☐ $\sqrt{7}$ ☐ $\sqrt{8}$ ☐

Solution proposée par Nicole Berckmans

1)



$$\sin 30° = \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$

2) $\sin 2x + \sin 6x = 0 \Rightarrow 2\sin 4x \cos 2x = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = k180° & \Rightarrow x = k45° \\ \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = 90° + k180° & \Rightarrow x = 45° + k90° \end{cases}$$

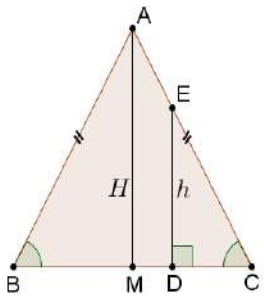
Rép : 1 solution $x = 45°$

3) $\alpha \in \left]\, 0, \pi \,\right[$. Posons $\beta = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$, tel que $\beta \in \left]\, 0, \pi \,\right[$;

et $\cot\beta = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} > 0 \Rightarrow \beta \in \left]\, 0, \dfrac{\pi}{2} \,\right[$

On demande $\sin\beta = \sqrt{\dfrac{1}{1+\cot^2\beta}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{(1-\cos)^2}{\sin^2\alpha}}}$

$$= \sin\alpha\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)^2}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2-2\cos\alpha}}$$



4)Aire $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} BC.H$, Aire $\Delta EDC = \dfrac{1}{2} CD.h$

Or $DC.h = \dfrac{1}{3} BC.H \Rightarrow \dfrac{3h}{H} = \dfrac{BC}{DC}$ (1)

D'autre part (Thalès) dans le triangle AMC : $\dfrac{h}{H} = \dfrac{DC}{MC} = \dfrac{DC}{BC.\frac{1}{2}}$ (2)

De (1) et (2) $\Rightarrow 3\dfrac{DC}{BC.\frac{1}{2}} = \dfrac{BC}{DC} \Rightarrow \left(\dfrac{BC}{DC}\right)^2 = 6 \Rightarrow \dfrac{BC}{DC} = \sqrt{6}$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Dans un triangle équilatéral, le rapport entre les rayons des cercles circonscrit et inscrit est égal à **2** parce-que dans un triangle équilatéral les bissectrices des angles intérieurs se confondent avec les médianes, et que ces dernières se coupent à 1/3 de la distance entre chaque milieu d'un côté et le sommet opposé.

Dans l'intervalle $0 < x < \frac{\pi}{2}$, l'équation $\sin 2x + \sin 6x = 0$ admet exactement **1 solution**, parce-que :

$$\begin{aligned}
\sin 2x + \sin 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x = \sin(-6x) \quad &\Leftrightarrow \quad 2x = -6x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \pi - 6x + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad 8x = 2k\pi \quad \text{ou} \quad -4x = \pi + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad x = k\frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

La seule solution dans l'intervalle $0 < x < \frac{\pi}{2}$ est donc $x = \frac{\pi}{4}$.

Pour tout a dans l'intervalle $]0, \pi[$ l'expression $\sin\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{1-\cos a}{\sin a}\right)\right)$ est égale à $\frac{\sin a}{\sqrt{2-2\cos a}}$, parce-que :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{1-\cos a}{\sin a}\right)\right) &= \sin\left(\arctan\left(\frac{\sin a}{1-\cos a}\right)\right) && \text{puisque} \quad \operatorname{arccot} x = \arctan\frac{1}{x} \\
&= \frac{\frac{\sin a}{1-\cos a}}{\sqrt{1+\left(\frac{\sin a}{1-\cos a}\right)^2}} && \text{puisque} \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{\sin a}{\sqrt{(1-\cos a)^2 + \sin^2 a}} \\
&= \frac{\sin a}{\sqrt{1 - 2\cos a + \cos^2 a + \sin^2 a}} \\
&= \frac{\sin a}{\sqrt{2 - 2\cos a}}
\end{aligned}$$

Soit ABC un triangle isocèle en A, D un point du segment BC et E un point du segment AC, tels que le triangle CDE est rectangle en D et que l'aire du triangle CDE vaut le tiers de l'aire du triangle ABC. Alors $|BC|/|DC|$ est égal à $\sqrt{6}$, parce-que :

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{BC}.\overline{MA} \qquad \text{et} \qquad A_{CDE} = \frac{1}{2}\overline{DC}.\overline{DE}$$

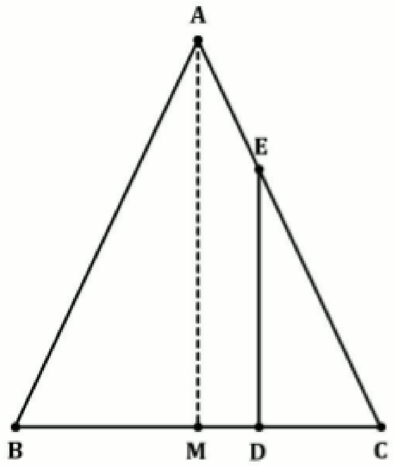
$$\begin{aligned}
A_{CDE} = \frac{1}{3}A_{ABC} \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{BC}.\overline{MA} = 3\overline{DC}.\overline{DE} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}.\frac{\overline{MA}}{\overline{DE}} = 3
\end{aligned}$$

Mais :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{DC}} = \frac{1}{2}\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}\right)^2 = 3$$

d'où :

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \sqrt{6}$$



---

14 septembre 2014

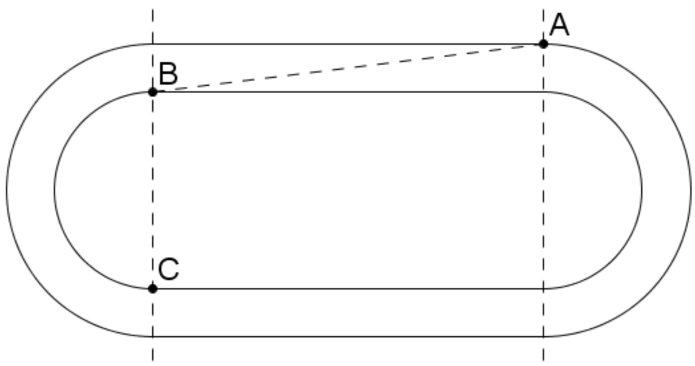
EXTRI391 – EPL, UCL, LLN, septembre 2014.

Le croquis ci-dessous schématise deux couloirs d'une piste d'athlétisme. Chaque couloir est constitué de deux lignes droites parallèles de longueur a (situées entre les deux traits pointillés parallèles) et de deux demi cercles appelés virages. Les lignes droites sont tangentes aux virages. Le rayon des virages du couloir inférieur est r et le rayon des virages du couloir extérieur est R. Les deux virages de gauche sont concentriques, ainsi que les deux virages de droite.

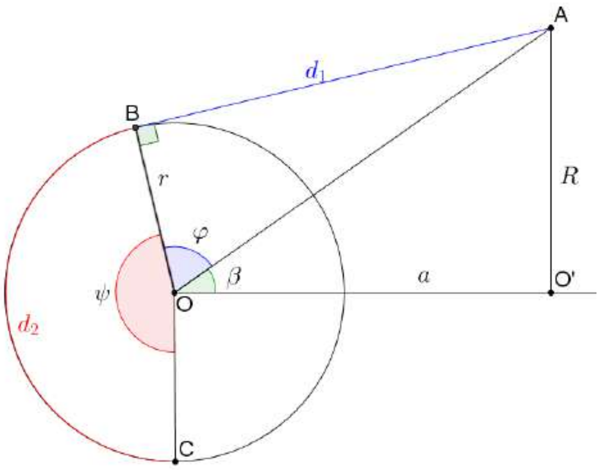
Le point A est situé à la sortie du virage de droite du couloir extérieur. Le point C est situé à la sortie du virage de gauche du couloir intérieur. Le point B appartient au virage de gauche du couloir intérieur et la droite AB est tangente au virage.

On vous demande de répondre aux questions suivantes qui interviennent dans le calcul de la position de la ligne de départ de l'épreuve du 800 mètres dans le deuxième couloir.

1) Exprimez la longueur d_1 du segment AB en fonction de r, R et a.
2) Exprimez la longueur d_2 de l'arc de cercle compris entre B et C en fonction de r, R et a.
3) Calculez d_1 et d_2 au cm près pour les données suivantes : $r = 36.8$ m, $R = 37.92$ m, et $a = 84.39$ m



Solution proposée par Nicole Berckmans



$r = 36.8$ m, $R = 37.92$ m, $a = 84.39$ m.

$\Delta OAB : OA^2 = d_1^2 + r^2;$ $\qquad \Delta OAD : OA^2 = a^2 + R^2;$

$d_1 = \sqrt{a^2 + R^2 - r^2} = \boxed{84.88 \text{ m}}$

$\tan\beta = \dfrac{R}{a} = \dfrac{37.92}{84.39} \Rightarrow \beta = 24.196°;$ $\qquad \tan\varphi = \dfrac{d_1}{r} = \dfrac{84.88}{36.8} \Rightarrow \varphi = 66.562°;$

$\psi = 270° - \varphi - \beta = 270° - 66.562° - 24.196° = 179.242° = 3.128$ rad

$d_2 = BC = r.\psi_{rad} = 36.8 \times 3.128 = 115.124 \Rightarrow \boxed{d_2 = 115.12 \text{ m}}$

Solution proposée par Dominique Druez

1. La diagonale du rectangle OO'AD, soit OA peut être calculée par Pythagore :

$$OA^2 = a^2 + R^2$$

AB est tangente en B au cercle de centre O et de rayon r, AB est donc perpendiculaire à OB, le triangle OBA est rectangle en B. Par Pythagore :

$$d_1^2 = OA^2 - r^2 = a^2 + R^2 - r^2$$
$$d_1 = \sqrt{a^2 + R^2 - r^2}$$

2. Pour trouver d2, il faut connaître l'angle α, la longueur de l'arc BC vaut :

$$d_2 = (\pi - \alpha)r$$

Le triangle OBA donne :

$$(1)\ \tan(\alpha + \beta) = \frac{d_1}{r} = \frac{\sqrt{a^2 + R^2 - r^2}}{r} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Le triangle ODA donne aussi :

$$\tan\beta = \frac{a}{R}$$

En remplaçant la valeur dans (1) :

$$\frac{d_1}{r} = \frac{\tan\alpha + \frac{a}{R}}{1 - \frac{a}{R}\tan\alpha} \to d_1 - d_1\frac{a}{R}\tan\alpha = r\tan\alpha + r\frac{a}{R}$$

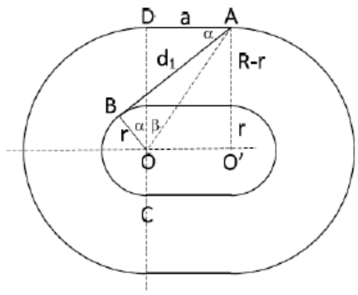
$$d_1 - r\frac{a}{R} = d_1\frac{a}{R}\tan\alpha + r\tan\alpha = \left(d_1\frac{a}{R} + r\right)\tan\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{d_1 - r\frac{a}{R}}{d_1\frac{a}{R} + r} = \frac{Rd_1 - ra}{d_1 a + rR} = \frac{R\sqrt{a^2 + R^2 - r^2} - ra}{a\sqrt{a^2 + R^2 - r^2} + rR}$$

$$d_2 = \left(\pi - \operatorname{atan}\left(\frac{R\sqrt{a^2 + R^2 - r^2} - ra}{a\sqrt{a^2 + R^2 - r^2} + rR}\right)\right)r$$

3. $r = 36{,}80m, R = 37{,}92m, et\ a = 84{,}39m$

$$d_1 = \sqrt{a^2 + R^2 - r^2} = 84{,}8843 \ldots\ m = 84m\ 88cm$$
$$\alpha = 0{,}01323 \ldots\ rad$$
$$d_2 = 115{,}1236 \ldots\ m = 115m\ 12cm$$



14 septembre 2014

EXTRI392 – Compléments.

En 1755, Euler a trouvé la formule suivante :

$$\arctan\frac{1}{n}=\arctan\frac{1}{n+p}+\arctan\frac{p}{n^2+np+1}$$

(1) Vérifier la formule.

(2) Utiliser la formule pour démontrer que

$$\frac{\pi}{4}=5\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{3}{79}$$

---

(1) $$\tan\left(\arctan\frac{1}{n+p}+\arctan\frac{p}{n^2+np+1}\right)=\frac{\dfrac{1}{n+p}+\dfrac{p}{n^2+np+1}}{1-\dfrac{1}{n+p}\cdot\dfrac{1}{n^2+np+1}}$$

$$=\frac{n^2+np+1+np+p^2}{n^3+n^2p+n+n^2p+np^2+p-p}=\frac{n^2+2np+p^2+1}{n\left(n^2+2np+p^2+1\right)}=\frac{1}{n}$$

(2) Il suffit d'appliquer la formule un certain nombre de fois :

Posons $\alpha=\dfrac{p}{n^2+np+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \arctan\frac{1}{1} && && && \\
&= \arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{3}{4} && \text{car } 1+p=7 && \Rightarrow p=6 && \Rightarrow \alpha=\frac{3}{4}\\
&= 2\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{17}{31} && \text{car } \frac{4}{3}+p=7 && \Rightarrow p=\frac{17}{3} && \Rightarrow \alpha=\frac{17}{31}\\
&= 2\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{3}{79}+\arctan\frac{1}{2} && \text{car } \frac{31}{17}+p=\frac{79}{3} && \Rightarrow p=\frac{1250}{51} && \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}\\
&= 3\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{3}{79}+\arctan\frac{1}{3} && \text{car } 2+p=7 && \Rightarrow p=5 && \Rightarrow \alpha=\frac{1}{3}\\
&= 4\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{3}{79}+\arctan\frac{2}{11} && \text{car } 3+p=7 && \Rightarrow p=4 && \Rightarrow \alpha=\frac{2}{11}\\
&= 5\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{3}{79} && \text{car } \frac{11}{2}+p=7 && \Rightarrow p=\frac{3}{2} && \Rightarrow \alpha=\frac{3}{79}
\end{aligned}$$

EXTRI393 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2014.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\tan x + \tan 3x + \sin 2x = 0$$

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$$CE : \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 3x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \end{cases}$$

$$\tan x + \tan 3x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \frac{\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x}{\cos x \cos 3x} = \frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} + \sin 2x = 0 \Rightarrow \frac{2\sin 2x \cos 2x}{\cos x \cos 3x} + \sin 2x = 0$$

$$(1) \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

Compte tenu des CE : $\boxed{x = k\pi}$

$$(2) \frac{2\cos 2x}{\cos x \cos 3x} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x + \cos x \cos 3x = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x + \cos x (\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x + \cos^2 x . \cos 2x - \cos x . \sin x . \underbrace{\sin 2x}_{2\sin x . \cos x} = 0$$

$$\Rightarrow 2(\cos^2 x - 1) + \cos^2 x (2\cos^2 x - 1) - 2\cos^2 x . \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x - 2 + 2\cos^4 x - \cos^2 x - 2\cos^2 x + 2\cos^4 x = 0$$

$$\Rightarrow 4\cos^4 x + \cos^2 x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{33}}{8} & \text{A rejeter car } < 0 \\ \dfrac{-1+\sqrt{33}}{8} \end{cases}$$

$$\text{a) } \cos x = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{33}}{8}} \simeq 0.770 \Rightarrow \boxed{x = \pm 0.692 + 2k\pi}$$

$$\text{b) } \cos x = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{33}}{8}} \simeq -0.770 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2.450 + 2k\pi}$$

---

10 novembre 2014

EXTRI394 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2014.

Vérifier l'identité suivante :

$$\frac{\cot x.\cot 2x-1}{\cot x.\cot 2x+1}=\cos 2x-\sin 2x.\tan x$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Premier membre :

$$\frac{\cot x.\cot 2x-1}{\cot x.\cot 2x+1}=\frac{\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-1}{\frac{\cos x}{\sin x}.\frac{\cos 2x}{\sin 2x}+1}=\frac{\cos x.\cos 2x-\sin x.\sin 2x}{\cos x.\cos 2x-\sin x.\sin 2x}=\frac{\cos 3x}{\cos x}$$

Deuxième membre :

$$\cos 2x-\sin 2x.\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x.\cos 2x-\sin x.\sin 2x}{\cos x}=\frac{\cos 3x}{\cos x}$$

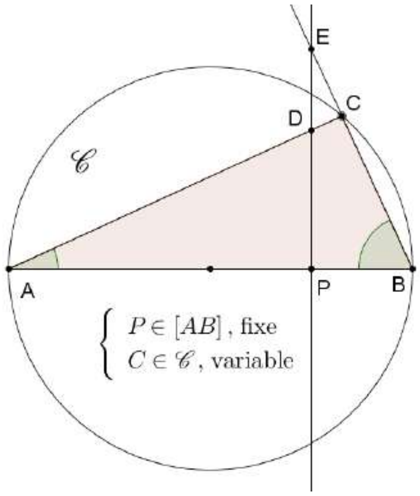
---

10 novembre 2014

EXTRI395 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2014.

Par une point fixe P d'un segment AB, on mène une perpendiculaire à AB. Elle coupe en D et E les côtés AC et BC d'un triangle ABC inscrit à un demi-cercle de diamètre AB.
Montrer que le produit entre PD et PE est une constante quelle que soit la position du point C sur le cercle.
Calculer la valeur de cette constante lorsque le point P est situé aux ¾ d'un segment QB de 12 cm de longueur.

Solution proposée par Fabienne Zoetard



Remarquons que pour que le triangle ABC existe, il faut $C \neq A$ et $C \neq B$.
Si $C = A$ ou $C = B$, alors $P = D = E$ et $\overline{PD}.\overline{PE} = 0 = cste$.

Soient les triangles ADP et BCP.
On a : $\overline{PD}.\overline{PE} = \overline{AP}.\tan A.\overline{BP}.\tan B$

$$= \overline{AP}.\overline{BP}.\underbrace{\tan A.\underbrace{\tan(90° - A)}_{=\cot A}}_{=1} = \overline{AP}.\overline{BP} = cste \text{ car } P \text{ est fixe.}$$

Si $\overline{AB} = 12$ cm, alors $\overline{PD} = 3$ cm et $\overline{PE} = 9$ cm $\Rightarrow \overline{AP}.\overline{BP} = 27$ cm^2

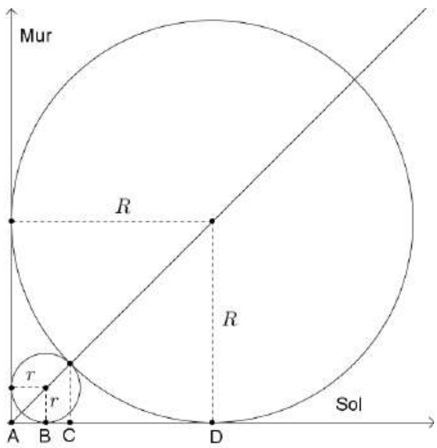
---

10 novembre 2014

EXTRI396 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2014.

Dans l'angle formé par un mur érigé verticalement par rapport au sol horizontal, une petite balle de rayon r vient se coincer. Une balle de plus grand rayon (R) vient, elle aussi se caler dans cet angle et cacher la plus petite.
Les centres de ces balles (sphériques) se trouvant dans le même plan, perpendiculaire au mur et au sol, quelle est la condition géométrique (relation entre r et R) pour que la grande balle (supposée indéformable) bloque la plus petite sans l'écraser?
Qu'adviendra-t-il si la grande balle est un ballon de football (diamètre 22 cm) et la petite balle est une balle de ping-pong (diamètre de 4 cm)?

Solution proposée par Fabienne Zoetard



$\overline{AB} = r$

$\overline{BC} = r.\cos 45°$

$\overline{CD} = R.\cos 45°$

$\overline{AD} = R$

Les balles seront bloquées si : $r + r\dfrac{\sqrt{2}}{2} + R\dfrac{\sqrt{2}}{2} = R$

$$\Rightarrow r\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = R\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow r = R.\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = R.\frac{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{r = R.\left(3-2\sqrt{2}\right)}$$

Si $r = 2$ cm et $R = 11$ cm :

$$r + r\frac{\sqrt{2}}{2} + R\frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} + \frac{11\sqrt{2}}{2} \simeq 11.19 > 11$$

Dans ce cas, les deux balles sont légèrement écrasées.

---

10 novembre 2014

EXTRI397 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2014.

Montrer que

$$\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$$

Notons que $\sin\frac{\pi}{8}=\sin\frac{7\pi}{8}$ et que $\sin\frac{3\pi}{8}=\sin\frac{7\pi}{8}$ car ce sont des sinus d'angles supplémentaires. L'espression devient :

$$\begin{aligned}2\sin^4\frac{\pi}{8}+2\sin^4\frac{3\pi}{8}&=\frac{1}{2}\left(4\sin^4\frac{\pi}{8}+4\sin^4\frac{3\pi}{8}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(1-\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2\right]\qquad\text{(Formule de Carnot)}\\&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}+1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

---

5 décembre 2014

EXTRI398 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2014.

Résoudre l'équation :

$$\cos 3x + \cos 7x = 1 + \cos 10x$$

représenter les solution entre 0 et 2π sur le cercle trigonométrique

---

$\cos 3x + \cos 7x = 1 + \cos 10x$

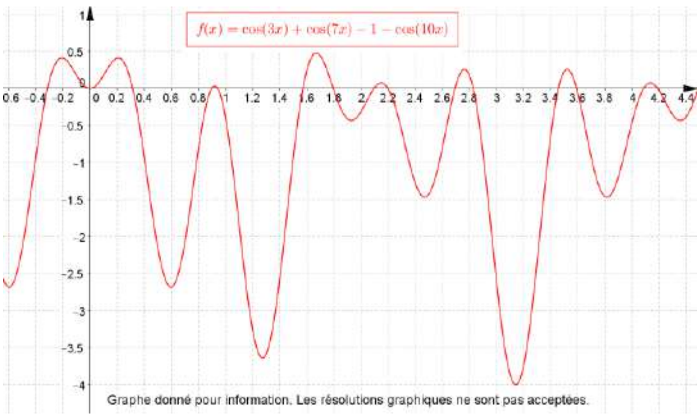
$\Rightarrow 2\cos 5x.\cos 2x = 1 + 2\cos^2 5x - 1$ (Simpson et Carnot)

$\Rightarrow \cos 5x.\cos 2x = \cos^2 5x$

1) $\underline{\cos 5x = 0} \Rightarrow 5x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{x = \pm\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}}$

2) $\underline{\cos 2x = \cos 5x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 2x + 2k\pi \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{2k\pi}{3}} \\ 5x = -2x + 2k\pi \Rightarrow 7x = 2k\pi \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{2k\pi}{7}} \end{cases}$$



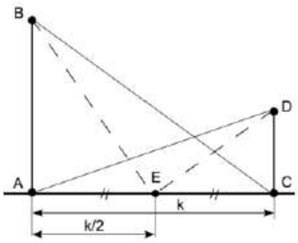
---

5 décembre 2014

EXTRI399 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2014.
EPL, UCL, LLN, juillet 2017.

Deux églises sont situées de part et d'autre d'une place horizontale. Les clochers de ces deux églises sont représentés respectivement par les segments *AB* et *CD*. Les bases de ces clochers sont séparées d'une distance *k*. Un observateur placé au point *C* voit le sommet *B* du clocher opposé sous un angle *BCA*. De même un observateur situé au point *A* voit le sommet du clocher opposé sous un angle *DAC* valant la moitié de l'angle *BCA*. La somme des angles *BEA* et *DEC* sous lesquels un observateur placé au point *E* voit respectivement les sommets *B* et *D* est égale à 90°. Si la distance *k* vaut 60 m, déterminer la hauteur des deux clochers *AB* et *CD*.

Nous reprenons la solution proposée par l'université.
(Prof. P. Duysinx et Prof. P. Dewallef)



Solution 1

Exprimons tout d'abord les angles $\widehat{DEC}$ et $\widehat{BEA}$ en fonction de k en notant que $\widehat{DEC}+\widehat{BEA}=\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\widehat{DEC}=\dfrac{2\overline{DC}}{k} \\ \operatorname{tg}\widehat{BEA}=\dfrac{2\overline{AB}}{k}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\widehat{BEC}\right)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\widehat{BEC}}=\dfrac{k}{2\overline{DC}}\Rightarrow\dfrac{\overline{DC}}{k}=\dfrac{k}{4\overline{AB}} \end{cases}$$

Alternativement, nous pouvons noter que les triangles EDC et BEA sont semblables 2 à 2. En effet, $\widehat{EDC}=\frac{\pi}{2}-\widehat{DEC}$ et par hypothèse $\widehat{DEC}+\widehat{BEA}=\frac{\pi}{2}$, ce qui nous permet de déduire que $\widehat{EDC}=\widehat{BEA}$. De manière similaire, nous pouvons déduire que $\widehat{DEC}=\widehat{EBA}$ et les deux triangles rectangles EDC et BEA sont semblables, ce qui entraine que :

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{EA}}{\overline{DC}}\Leftrightarrow\frac{\overline{BA}}{k/2}=\frac{k/2}{\overline{DC}}\Leftrightarrow\frac{\overline{DC}}{k}=\frac{k}{4\overline{AB}}$$

Exprimons maintenant les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{DAC}$ en fonction de k en notant que $\widehat{BCA}=2\widehat{DAC}$:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\widehat{DAC}=\dfrac{\overline{DC}}{k} \\ \operatorname{tg}\widehat{BCA}=\dfrac{\overline{AB}}{k}=\operatorname{tg}\left(2\widehat{DAC}\right)=\dfrac{2\operatorname{tg}\widehat{DAC}}{1-\operatorname{tg}^2\widehat{DAC}}=\dfrac{\frac{2\overline{DC}}{k}}{1-\frac{\overline{DC}^2}{k^2}} \end{cases}$$

Solution 2

Une autre solution possible consiste à écrire les relations entre les côtés des triangles rectangles BAE, BAC, CDA et CDE.

L'énoncé nous dit d'une part

$$\widehat{ACB} = 2\,\widehat{CAD} = 2\,\alpha$$

et d'autre part que :

$$\widehat{BED} = 90°$$

soit

$$\widehat{AEB} + \widehat{DEC} = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{DEC} = 90° - \widehat{AEB}$$

Donc

$$\tan\widehat{DEC} = \tan(90° - \widehat{AEB}) = \frac{1}{\tan\widehat{AEB}}$$

Ecrivons maintenant les relations dans les triangles rectangles BAE, BAC, CDA et CDE. Dans BAE, on a :

$$\overline{BA} = \overline{AE}\ \tan\widehat{AEB} = (k/2)\ \tan\widehat{AEB}$$

Dans BAC, on a :

$$\overline{BA} = \overline{AC}\ \tan\widehat{ACB} = k\ \tan\widehat{ACB}$$

En remplaçant la valeur de $\dfrac{\overline{DC}}{k}$ par la valeur précédemment trouvée, à savoir $\dfrac{k}{4\overline{AB}}$, il vient $\dfrac{\overline{AB}}{k} = \dfrac{\frac{2k}{4\overline{AB}}}{1-\frac{k^2}{16\overline{AB}^2}} \Leftrightarrow 16\overline{AB}^2 = 9k^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = \dfrac{3k}{4}$. Ensuite, $\overline{DC} = \dfrac{4k^2}{12k} = \dfrac{k}{3}$. Si $k = 60\,\mathrm{m}$, $\overline{AB} = 45\,\mathrm{m}$ et $\overline{DC} = 20\,\mathrm{m}$.

Dans CDE, on a

$$\overline{CD} = \overline{EC}\ \tan\widehat{DEC} = (k/2)\ \tan\widehat{DEC}$$

Dans CDA, on a

$$\overline{CD} = \overline{AC}\ \tan\widehat{DAC} = k\ \tan\widehat{DAC}$$

En égalant les expressions des longueurs $\overline{BA}$ et $\overline{CD}$, il vient :

$$\overline{BA} = (k/2)\ \tan\widehat{AEB}\ = k\ \tan 2\alpha$$

soit

$$\tan\widehat{AEB} = 2\tan 2\alpha = 2\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

On a également

$$\overline{CD} = (k/2)\ \tan\widehat{DEC} = k\ \tan\alpha$$

soit

$$\tan\widehat{DEC} = \tan(90° - \widehat{AEB}) = \frac{1}{\tan\widehat{AEB}} = 2\tan\alpha$$

En identifiant la valeur de $\tan \widehat{AEB}$, on obtient une équation permettant de déterminer $\tan \alpha$.

$$\tan \widehat{AEB} = \frac{1}{2\tan\alpha} = 4\frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

soit

$$4\frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{1}{2\tan\alpha} \quad\Leftrightarrow\quad \tan^2\alpha = \frac{1}{9} \quad\Leftrightarrow\quad \tan\alpha = \pm\frac{1}{3}$$

Seul le signe plus a du sens ici, et on a

$$\alpha = 18,4399°$$

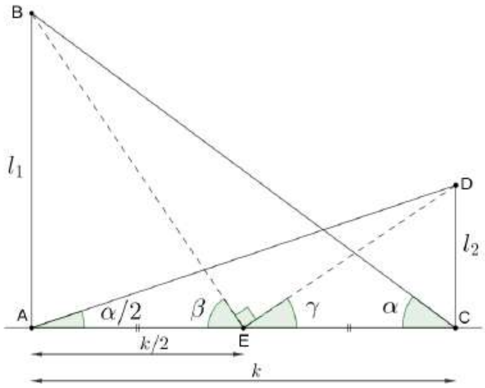
Il est alors maintenant aisé de calculer les hauteurs

$$\overline{AB} = k\tan 2\alpha = 45 \text{ m}$$

et

$$\overline{CD} = k\tan\alpha = 20 \text{ m}$$

Solution proposée par Martine Devillers



$$\begin{cases} \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{l_2}{60} \\ \tan\alpha = \frac{l_1}{60} \\ \beta+\gamma = 90° \\ \tan\beta = \frac{l_1}{30} \\ \tan\gamma = \frac{l_2}{30} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha.\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{l_1 l_2}{3600} \Rightarrow l_1 l_2 = 3600.\tan\alpha.\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\beta.\tan\gamma = \tan\beta.\tan(90°-\beta) = 1 \\ \tan\beta.\tan\gamma = \frac{l_1 l_2}{900} \Rightarrow l_1 l_2 = 900 \end{cases} \Rightarrow \tan\alpha.\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 8\tan^2\frac{\alpha}{2} = 1-\tan^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{9} \text{ avec } \alpha \in \left]0,90°\right[\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$$

Finalement : $l_2 = 60\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{60}{3} = 20 \text{ m} \Rightarrow l_1 = \frac{900}{l_2} = 45 \text{ m}$

Réponse : $\boxed{l_1 = 45 \text{ m},\ l_2 = 20 \text{ m}}$

20 janvier 2015