Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 4

EXTRI040 – EXTRI049

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

EXTRI040 – FACSA, UCL, Liège, septembre 1996.
EPL, UCL, LLN, septembre 2002.
POLYTECH, UMons, Mons, septembre 2016

Démontrer que le triangle ABC est rectangle si ses trois angles vérifient la relation :

$$\cot\frac{B}{2}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}$$

Enoncé de Polytech , 2016

Démontrer que si la relation ci-après est satisfaite, alors le triangle ABC est rectangle.

$$1+\cos B=\sin A+\sin C$$

On a : $\cot\frac{B}{2}=\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{2\sin^2\frac{B}{2}}=\dfrac{\sin B}{1-\cos B}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin B}{1-\cos B}=\dfrac{\sin A+\sin C}{\sin B}\quad \Rightarrow \sin^2 B=(1-\cos B)(\sin A+\sin C)$

$\Rightarrow 1-\cos^2 B=(1-\cos B)(\sin A+\sin C)$

1) $1-\cos B=0 \quad \rightarrow \quad B=2k\pi$ Pas de triangle.

Il reste : $1+\cos B=\sin A+\sin C$

Or $B=\pi-(A+C)$ et $\cos\left(\pi-(A+C)\right)=-\cos(A+C)$

$\Rightarrow 1-\cos(A+C)=\sin A+\sin C \Rightarrow 1-\left[1-2\sin^2\frac{A+C}{2}\right]=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$

$\Rightarrow \sin^2\frac{A+C}{2}=\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$

2) $\sin\frac{A+C}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A+C=0 \\ A+C=\pi \end{cases} \quad \Rightarrow$ Pas de triangle.

3) $\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{A-C}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A+C}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A-C}{2} & \Rightarrow \quad A=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{A+C}{2}=-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{A-C}{2} & \Rightarrow \quad C=-\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow |C|=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Note : d'un point de vue géométrique, on considère la valeur absolue de l'angle.

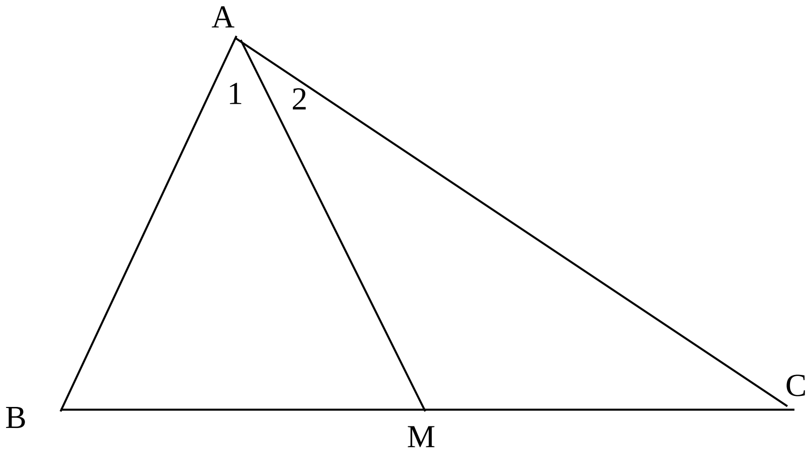
EXTRI041 – POLYTECH, UMons, questions-types 2000-2001.
EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2001.
EPL, UCL, Louvain, septembre 2002.
ERM, Bruxelles, 2009.

Dans un triangle, la médiane AM est égale au côté AB. Dans ce cas :

a) Démontrer la relation : $\tan B = 3 \tan C$

b) Démontrer que : $\sin A = 2 \sin(B - C)$

c) Calculer B et C si A est égal à 70°



$a)$ Dans le triangle ABC : $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2\ BC\ AC\cos C$

Dans le triangle AMC : $AM^2 = \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 + AC^2 - 2\left(\dfrac{BC}{2}\right) AC\cos C$

On soustrait membre à membre : $\dfrac{3BC^2}{4} - BC\ AC\cos C \quad \Rightarrow \quad \cos C = \dfrac{3BC}{4AC} \quad (1)$

Dans le triangle ABC : $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2\ BC.AB\cos B \quad (2)$

Dans le triangle AMC : $AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2\ AM.MC\cos M_2 \quad (3)$

Or $AM = AB,\ MC = \dfrac{BC}{2}$ et $\cos M_2 = -\cos M_1 = -\cos B$ car le triangle AMB est isocèle.

Donc (3) devient : $AC^2 = AB^2 + \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 + 2\ AB.\left(\dfrac{BC}{2}\right)\cos B \quad (4)$

On soustrait (2) et (4) membre à membre : $\dfrac{BC}{4} - AB\cos B = 0 \Rightarrow \cos B = \dfrac{BC}{4AB} (5)$

D'autre part dans le triangle ABC : $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} \quad \Rightarrow \quad \sin C = \dfrac{AB}{BC}\sin A \quad (6)$

De (1) et (6), on tire: $\tan C = \dfrac{4}{3}\dfrac{AB\ AC}{BC^2}\sin A \quad (7)$

Toujours dans le triangle ABC : $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{BC}{\sin A} \quad \rightarrow \quad \sin B = \dfrac{AC}{BC}\sin A \quad (8)$

De (5) et (8), on tire : $\tan B = 4\dfrac{AB\ AC}{BC^2}\sin A \quad (9)$

De (8) et (9), on déduit : $\tan B = 3\tan C$

$b)$ $A = A_1 + A_2 = 2\pi - B - C$ or $A_1 = 2\pi - 2B \Rightarrow A_2 = B - C$

$\dfrac{MC}{\sin A_2} = \dfrac{AM}{\sin C}$ or $MC = \dfrac{BC}{2}$ et $AM = AB \Rightarrow \dfrac{BC}{2\sin A_2} = \dfrac{AB}{\sin C}$

Mais $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A}$ et donc on déduit que $\sin A = 2\sin A_2 = 2\sin(B - C)$

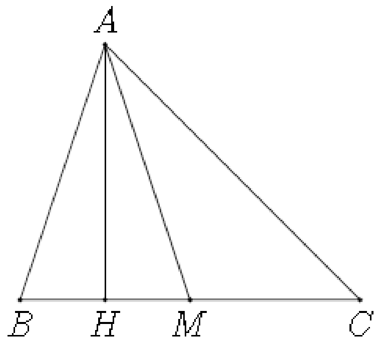
$c)$ $A + B + C = 180° \quad \Rightarrow \quad B + C = 110° \quad \Rightarrow \quad C = 110 - B$

$3\tan C = \tan B \quad \Rightarrow \quad 3\tan(110 - B) = \tan B \quad \Rightarrow \quad 3\dfrac{\tan 110 - \tan B}{1 + \tan 110\tan B} = \tan B$

$3(\tan 110 - \tan B) = \tan B + \tan 110\tan^2 B \Rightarrow \quad 2.75\tan^2 B - 4\tan B - 8.24 = 0$

$$\tan B = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 22.66}}{2.75} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tan B = 2.6 \quad \Rightarrow \quad B = 69° \quad et \quad C = 41° \\ \tan B = -1.15 \quad \Rightarrow \quad B = -49° \quad \text{A rejeter.} \end{cases}$$

Solution proposée par Christine Ginoux.



Hypothèses :

$\overline{AB} = \overline{AM}$
$\overline{BM} = \overline{MC}$

Thèses :

$\tan \hat{B} = 3 \tan \hat{C}$
$\sin \hat{A} = 2 \sin(\hat{B} - \hat{C})$

1. Démonstration de $\tan \hat{B} = 3 \tan \hat{C}$

   Par hypothèse, ABM est isocèle.
   AH est une hauteur de ABM

   Dans le triangle rectangle ABH : $\tan \hat{B} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$

   Dans le triangle rectangle AHC : $\tan \hat{C} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{HC}}$

   $\overline{HC} = 3\overline{BH}$
   Donc $\tan \hat{B} = 3 \tan \hat{C}$

2. Démonstration de $\sin \hat{A} = 2 \sin(\hat{B} - \hat{C})$

$$
\begin{aligned}
\sin \hat{A} &= \sin(\widehat{BAH} + \widehat{HAC}) \\
&= \sin \widehat{BAH} \cos \widehat{HAC} + \cos \widehat{BAH} \sin \widehat{HAC} \\
&= \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{HC}}{\overline{AC}} \qquad \text{et } \overline{HC} = 3\overline{BH} \\
&= 4 \cdot \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\sin(\hat{B} - \hat{C}) &= 2(\sin \hat{B} \cos \hat{C} - \cos \hat{B} \sin \hat{C}) \\
&= 2\left(\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{HC}}{\overline{AC}} - \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}\right) \\
&= 4 \cdot \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}
\end{aligned}
$$

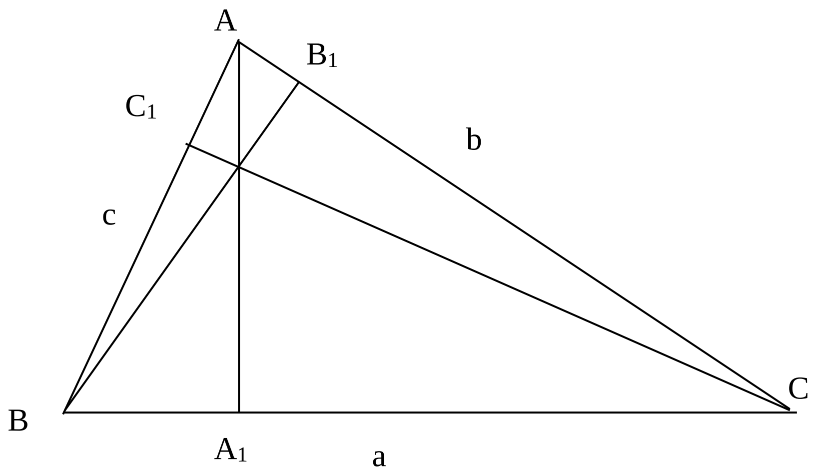
cqfd

H

EXTRI042 – POLYTECH, UMons, questions-types 2000-2001.

Montrer que dans un triangle quelconque, on a la relation

$$(a-c\cos B)(b-a\cos C)(c-b\cos A)=abc\cos A\cos B\cos C$$



Soit A_1, B_1, C_1, les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets.

$$a-c\cos B=a-BA_1=A_1C=b\cos C$$
$$b-a\cos C=b-CB_1=B_1A=c\cos A$$
$$c-b\cos A=c-AC_1=C_1B=a\cos B$$

On multiplie membre à membre et on obtient :

$$(a-c\cos B)(b-a\cos C)(c-b\cos A)=abc\cos A\cos B\cos C$$

EXTRI043 – POLYTECH, UMons, questions-types 2000-2001.
EPL, UCL, LLN, septembre 2003.
FACSA, ULG, Liège, septembre 2004.
FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2009.
FACSA, ULG, Liège, septembre 2014.

Un triangle possède des angles qui vérifient la relation

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$$

Démontrer que le triangle est rectangle.

Première méthode

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$$

$$\sin A = \frac{a}{b} \sin B \quad \sin C = \frac{c}{b} \sin B$$

$$\to \frac{a \sin B}{b} = \frac{\sin B + \frac{c}{b} \sin B}{\cos B + \cos C} \to \cos B + \cos C = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

D'autre part

$$\cos B + \cos C = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Donc

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$$

$$a^2c + b^2c - c^3 + a^2b + c^2b - b^3 = 2bc\ (b + c)$$

$$a^2\ (b + c) + cb\ (b + c) - (b + c)\ (b^2 - bc + c^2) = 2bc\ (b + c)$$

$$a^2 + cb - b^2 + bc - c^2 = 2bc$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \ \to \text{Rectangle en A}$$

Deuxième méthode

$$\sin \ A = \frac{\sin B + \sin \ C}{\cos \ B + \cos \ C}$$

$$\sin A = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi - \mathrm{A}}{2}}{\cos\frac{\pi - \mathrm{A}}{2}} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\rightarrow \sin A \sin\frac{A}{2} = \cos\frac{A}{2} \quad \rightarrow \quad 2\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = \cos\frac{A}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos\frac{A}{2} = 0 \ \rightarrow \ A = \pi \quad \text{Triangle plat} \\ \sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ \sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow \ A = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Le triangle est donc rectangle en A.

EXTRI044 – Polytech, UMONS, Mons - Questions-types 2000-2001

Démontrer que les angles d'un triangle quelconque vérifient la relation :

$$\frac{\sin A+\sin B-\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$\frac{\sin A+\sin B-\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{\sin A+\sin B-\sin(\pi-A-B)}{\sin A+\sin B+\sin(\pi-A-B)}$$

$$=\frac{\sin A+\sin B-\sin(\pi-\mathrm{A})\cos(-B)-\cos(\pi-A)\sin(-B)}{\sin A+\sin B+\sin(\pi-\mathrm{A})\cos(-B)+\cos(\pi-A)\sin(-B)}$$

$$=\frac{\sin A+\sin B-\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\sin A+\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B}$$

$$=\frac{\sin A(1-\cos B)+\sin B(1-\cos A)}{\sin A(1+\cos B)+\sin B(1+\cos A)}$$

or $\quad \tan\frac{B}{2}=\frac{1-\cos B}{\sin B}\quad$ et $\quad \tan\frac{B}{2}=\frac{\sin B}{1+\cos B}$

$$\to\quad \frac{\sin A\sin B\tan\frac{B}{2}+\sin B\sin A\tan\frac{A}{2}}{\frac{\sin A\sin B}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{\sin A\sin B}{\tan\frac{A}{2}}}=\frac{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{A}{2}}{\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}}$$

$$=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

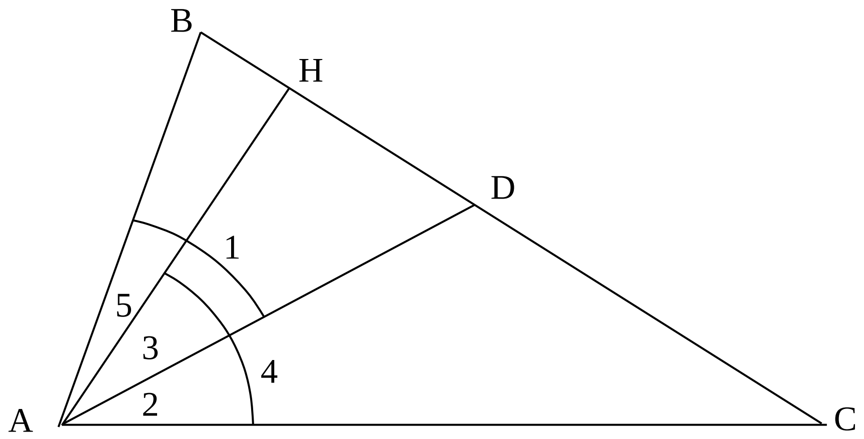
EXTRI045 – Polytech, UMONS, Mons - Questions-types 2000-2001.
Polytech, UMONS, Mons – Juillet 2005.

Dans un triangle *ABC*

a) Si *AH* et *AD* désignent respectivement la hauteur et la bissectrice intérieure issues de *A*, démontrer que :

$$AH = AD \cos \frac{B - C}{2}$$

b) Résoudre le triangle *ABC* connaissant $A = 22°10'$, $AH = 1$ m et $AD = 2$m.



a) On a immédiatement : $AH = AD\cos A_3$

Il suffit de montrer que $A_3 = \dfrac{B-C}{2}$

$$A = A_1 + A_2 \quad A_4 = \frac{\pi}{2} - C \quad A_5 = \frac{\pi}{2} - B$$

$$A_3 = A_4 - A_2 = \frac{\pi}{2} - C - \frac{A}{2}$$

$$A_3 = A_1 - A_5 = \frac{A}{2} - \frac{\pi}{2} + B$$

$$2A_3 = B - C \quad \rightarrow \quad A_3 = \frac{B-C}{2}$$

b) $AH = AD\cos\dfrac{B-C}{2} = AD\cos A_3 \quad \rightarrow \quad \cos A_3 = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{1}{2}$

$\rightarrow \quad A_3 = 60°$

$$A_4 = A_3 + A_2 = 60 + \frac{22°20'}{2} = 71°10'$$

En faisant le dessin en fonction des données, on vérifiera qu'il est logique que A_3 est plus grand que A et donc de A_2.

$$C = \frac{\pi}{2} - A_4 = 18°50'$$

$$B = 2 \times 60 + 18°50' = 138°50'$$

$$A_5 = \frac{\pi}{2} - 138°50' = -48.83°$$

$$AB = \frac{AH}{\cos A_5} = \frac{1}{\cos(-48.83°)} = 1.519\ m$$

$$AC = \frac{AH}{\cos A_4} = \frac{1}{\cos 71°10'} = 3.098\ m$$

$$BC^2 = 1.519^2 + 3.098^2 - 2 \times 1.519 \times 3.098 \cos 22°20'$$

$$BC = 1.788\ m$$

EXTRI046 – POLYTECH, UMons, Mons, questions-types 2000-2001. FACSA, ULiège, Liège, septembre 2003 FACSA, ULiège, Liège, septembre 2017

Enoncé de Polytech

Démontrer que dans un triangle ABC

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2=2\cos A\cos B\cos C$$

Enoncé de FACSA

Soient A, B et C, les angles d'un triangle. Montrer que la triangle ABC est rectangle si et seulement si

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$$

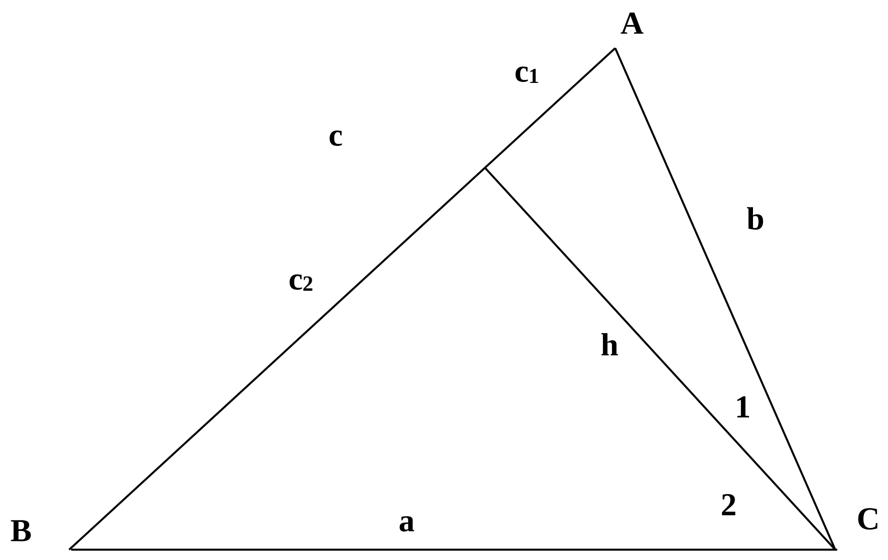
$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2=1-\cos^2 A+1-\cos^2 B+1-\cos^2 C-2$$
$$=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2(\pi-A-B)$$
$$=1-\cos^2 A-\cos^2 B-[-\cos A\cos B+\sin A\sin B]^2$$
$$=1-\cos^2 A-\cos^2 B-[\cos^2 A\cos^2 B-2\cos A\cos B\sin A\sin B+\sin^2 A\sin^2 B]$$
$$=1-\cos^2 A-\cos^2 B-\left[\cos^2 A\cos^2 B-2\cos A\cos B\sin A\sin B+(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)\right]$$
$$=1-\cos^2 A-\cos^2 B-[2\cos^2 A\cos^2 B-2\cos A\cos B\sin A\sin B+1-\cos^2 A\cos^2 B]$$
$$=-2\cos^2 A\cos^2 B+2\cos A\cos B\sin A\sin B$$
$$=-2\cos A\cos B[\cos A\cos B-\sin A\sin B]$$
$$=-2\cos A\cos B\cos(A+B)$$
$$=2\cos A\cos B\cos(\pi-A-B)$$
$$=2\cos A\cos B\cos C$$

Pour la question de FACSA, il suffit de voir que si $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$ alors $\cos A.\cos B.\cos C=0$. Ce qui implique que l'un des cos est nul et donc que l'un des angles vaut 90°. Le triangle est alors rectangle.

Modifié le 9 oct 2013

EXTRI047 – POLYTECH, UMons, Mons, questions-types 1999-2000.

Résoudre le triangle ABC connaissant la différence D entre les angles A et B, la différence d entre les côtés a et b, et la hauteur h menée du sommet C.



$D = A - B \qquad d = a - b$

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \quad \rightarrow \quad a \sin C = c \sin A \quad et \quad b \sin C = c \sin C$

On soustrait membre à membre.

$(a-b)\sin C = c\left(\sin A - \sin B\right)$

$2d \sin \dfrac{C}{2} \cos \dfrac{C}{2} = 2c \cos \dfrac{A+B}{2} \sin \dfrac{A-B}{2}$

$\sin \dfrac{C}{2} \cos \dfrac{C}{2} = \dfrac{c}{d} \cos \dfrac{A+B}{2} \sin \dfrac{D}{2}$

or $C = \pi - A - B \quad \rightarrow \quad \dfrac{C}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{A+B}{2}\right)$

donc $\sin \dfrac{C}{2} \cos \dfrac{C}{2} = \dfrac{c}{d} \sin \left[\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{A+B}{2}\right] \sin \dfrac{D}{2} = \dfrac{c}{d} \sin \dfrac{C}{2} \sin \dfrac{D}{2}$

$$\rightarrow \quad \boxed{\cos \frac{C}{2} = \frac{c}{d} \sin \frac{D}{2}} \qquad (1)$$

Etablissons une équation en C :

$c_1 = h \tan C_1 \quad et \quad c_2 = h \tan C_2$

$c = c_1 + c_2 = h\left(\tan C_1 + \tan C_2\right) = h \dfrac{\sin\left(C_1 + C_2\right)}{\cos C_1 \cos C_2} = h \dfrac{\sin C}{\cos C_1 \cos C_2}$

$= h \dfrac{\sin C}{\sin A \sin B}$ car A et C_1; B et C_2 sont complémentaires.

Or $\sin A \sin B = \dfrac{1}{2} \cos\left(A - B\right) - \dfrac{1}{2} \cos\left(A + B\right)$

et $\cos\left(A + B\right) = \cos\left(\pi - C\right) = -\cos C$

$\rightarrow \sin A \sin B = \dfrac{1}{2} \cos D + \dfrac{1}{2} \cos C$

Par conséquent, en tenant compte de (1): $\quad c = 2h \dfrac{\sin C}{\cos D + \cos C} = d \dfrac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{D}{2}}$

$\rightarrow d \cos \dfrac{C}{2} \left[\cos D + \cos C\right] = 2h \sin C \sin \dfrac{D}{2}$

$\cos \dfrac{C}{2} \left[\cos D + 1 - 2\sin^2 \dfrac{C}{2}\right] = \dfrac{4h}{d} \sin \dfrac{D}{2} \sin \dfrac{C}{2} \cos \dfrac{C}{2}$

$2\sin^2 \dfrac{C}{2} + \dfrac{4h}{d} \sin \dfrac{D}{2} \sin \dfrac{C}{2} - \left[\cos D + 1\right] = 0$

Résolution si $D = 15.2°$, $d = 10.42\ m$ et $h = 132.8m$

$$\frac{4h}{d}\sin\frac{D}{2} = \frac{4\times 132.8}{10.42}\sin\frac{15.2}{2} = 6.7423$$

$$\cos D + 1 = 1 + \cos 15.2 = 1.9650$$

$$\sin\frac{C}{2} = \frac{-6.7423 \pm \sqrt{6.7423^2 + 8\times 1.9650}}{4} = 0.26984$$

$$\rightarrow \boxed{C = 31.3095}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \frac{c}{d}\sin\frac{D}{2} \quad\rightarrow\quad \cos\frac{31.3095}{2} = \frac{c}{10.42}\sin\frac{15.2}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{c = 75.864\ m}$$

Or on a aussi démontré au début que :

$$d\sin C = c\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{D}{2}$$

$$\rightarrow 10.42\sin 31.3095 = 2\times 75.864\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{15.2}{2}$$

$$\rightarrow A + B = 148.6915$$

$$\begin{cases} A - B = 15.2 \\ A + B = 148.6915 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{A = 81.946} \\ \boxed{B = 66.746} \end{cases}$$

$$b = c\frac{\sin B}{\sin C} = 75.864\frac{\sin 66.746}{\sin 31.3095} \quad\rightarrow\quad \boxed{b = 134.128\ m}$$

$$a = c\frac{\sin A}{\sin C} = 75.864\frac{\sin 81.946}{\sin 31.3095} \quad\rightarrow\quad \boxed{a = 144.548\ m}$$

EXTRI048 – POLYTECH, UMons, Mons, questions-types 2000-2001.

Démontrer que

$$E = \cos^2(a+b) + \cos^2(a-b) - \cos 2a \cos 2b$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \quad et \quad \cos 2b = 2\cos^2 b - 1$$
$$\cos 2a \cos 2b = 4\cos^2 a \cos^2 b - 2\cos^2 a - 2\cos^2 b + 1$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos^2(a+b) = \cos^2 a \cos^2 b - 2\cos a \cos b \sin a \sin b + \sin^2 a \sin^2 b$$
$$= \cos^2 a \cos^2 b - 2\cos a \cos b \sin a \sin b + (1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b)$$
$$= 2\cos^2 a \cos^2 b - 2\cos a \cos b \sin a \sin b + 1 - \cos^2 a - \cos^2 b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\cos^2(a-b) = \cos^2 a \cos^2 b + 2\cos a \cos b \sin a \sin b + \sin^2 a \sin^2 b$$
$$= \cos^2 a \cos^2 b + 2\cos a \cos b \sin a \sin b + (1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b)$$
$$= 2\cos^2 a \cos^2 b + 2\cos a \cos b \sin a \sin b + 1 - \cos^2 a - \cos^2 b$$

$$\begin{aligned} E &= 2\cos^2 a \cos^2 b - 2\cos a \cos b \sin a \sin b + 1 - \cos^2 a - \cos^2 b \\ &\quad + 2\cos^2 a \cos^2 b + 2\cos a \cos b \sin a \sin b + 1 - \cos^2 a - \cos^2 b \\ &\quad - 4\cos^2 a \cos^2 b + 2\cos^2 a + 2\cos^2 b - 1 = 1 \end{aligned}$$

Et donc E est indépendant de a et b.

EXTRI049 – POLYTECH, UMons, Mons, questions-types 2000-2001.

Dans un triangle ABC, on désigne par D la différence entre les angles B et C, et par d la différence entre les côtés b et c.

a) Démontrer que.

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{a}{d}\sin\frac{D}{2}$$

b) Résoudre si D = 15° 12’ , d = 2 m et a = 12 m

$a)$ Voir exercice EXTRI047

$$b)\ \cos\frac{A}{2}=\frac{a}{d}\sin\frac{D}{2}=\frac{12}{2}\sin\frac{15°12'}{2}=0.79 \quad\rightarrow\quad A=74,97$$

$$A+B+C=180 \quad\rightarrow\quad B+C=105,03$$

$$\text{et comme}\quad D=B-C \quad\rightarrow\quad B=60.115 \quad \text{et} \quad C=44.915$$

$$b=a\,\frac{\sin B}{\sin A}=12\,\frac{\sin 60.115}{\sin 74.97}=10.77$$

$$c=a\,\frac{\sin C}{\sin A}=12\,\frac{\sin 44.915}{\sin 74.97}=8.77$$
