Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 40

EXTRI400-EXTRI409

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Janvier 2015

EXTRI400 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2014.

Montrer que :

$$\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}.\sin\frac{7\pi}{12}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{2\cos\frac{\pi}{12}}.\sin\frac{5\pi}{12} \qquad \text{car } \begin{cases}\sin\frac{\pi}{6}=2\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}\\ \frac{7\pi}{12} \text{ et } \frac{5\pi}{12} \text{ sont supplémentaires}\end{cases}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{2\sin\frac{5\pi}{12}}.\sin\frac{5\pi}{12} \qquad \text{car } \frac{\pi}{12} \text{ et } \frac{5\pi}{12} \text{ sont complémentaires}$$

$$=\frac{1}{4}$$

---

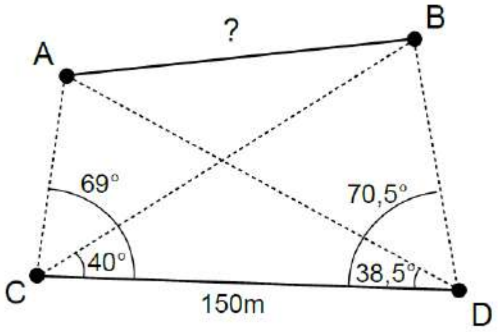
20 janvier 2015

EXTRI401 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2014.

Pour déterminer la distance entre 2 points inaccessibles A et B, on choisit une base d'opération CD longue de 150 m et on mesure les angles $BCD = 40°$, $ACD = 69°$, $ADC = 38.5°$ et $BDC = 70.5°$. Calculer la distance AB (le dessin ci-dessous n'est pas à l'échelle!)

Nous reprenons la solution proposée par l'université.
(Prof. P. Duysinx et Prof. P. Dewallef)

La configuration décrite dans l'énoncé peut se représenter de la manière suivante (le dessin n'est pas à l'échelle!) :



En appliquant le théorème de Pythagore généralisé au triangle ABC il vient :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\,\overline{BC}\cos\widehat{ACB}$$

Le segment $\overline{AC}$ peut être déterminé en appliquant la relation des sinus dans le triangle ACD :

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\widehat{ADC}} = \frac{\overline{DC}}{\sin\widehat{CAD}} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{DC}\sin\widehat{ADC}}{\sin\widehat{CAD}}$$

L'angle $\widehat{ADC}$ est donné dans l'énoncé et vaut 38.5° alors que l'angle $\widehat{CAD}$ peut être évalué en notant que la somme des angles d'un triangle vaut 180° ce qui, appliqué au triangle ACD donne :

$$180^\circ = \widehat{ADC} + \widehat{CDA} + \widehat{ADC} + \widehat{CAD} \ \Rightarrow\ \widehat{CAD} = 180^\circ - 69^\circ - 38.5^\circ = 72.5^\circ$$

ainsi nous calculons $\overline{AC} = \dfrac{150\,\mathrm{m} \times \sin 38.5^\circ}{\sin 72.5^\circ} = 97.91\,\mathrm{m}$.

Pour déterminer le segment $\overline{BC}$, nous procédons de manière similaire en appliquant Pythagore généralisé au triangle BCD :

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \widehat{BDC}} = \frac{\overline{DC}}{\sin \widehat{CBD}} \ \Rightarrow\ \overline{BC} = \frac{\overline{DC} \sin \widehat{BDC}}{\sin \widehat{CBD}}$$

L'angle $\widehat{BDC}$ est donné dans l'énoncé et vaut 70.5° alors que l'angle $\widehat{CBD}$ peut être évalué en notant que la somme des angles d'un triangle vaut 180° ce qui, appliqué au triangle BCD donne :

$$180^\circ = \widehat{BDC} + \widehat{CDB} + \widehat{BDC} + \widehat{CBD} \ \Rightarrow\ \widehat{CBD} = 180^\circ - 70.5^\circ - 40^\circ = 69.5^\circ$$

et nous calculons $\overline{BC} = \dfrac{150\,\mathrm{m} \times \sin 70.5^\circ}{\sin 69.5^\circ} = 150.96\,\mathrm{m}$.

Le segment $\overline{AB}$ est alors estimé en reprenant la première relation :

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\,\overline{BC}\cos\widehat{ACB} \\ &= 97,91^2 + 150.96^2 - 2 \times 97,91 \times 150,96 \times \cos(69^\circ - 40^\circ) \\ &= 6520.45 \ \Rightarrow\ \overline{AB} = 80.75\,\mathrm{m}.\end{aligned}$$

EXTRI402 – FACS, ULB, Brussels, juillet 2014.

On pose $y = \arcsin\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$

Calculer $\cos(4y)$ et en déduire y.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

$$y = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \Leftrightarrow \sin y = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad (\sin y > 0)$$

$$\text{et} \quad \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{10\left(\sqrt{5}-1\right)}}{4}$$

$$\sin 2y = 2\sin y \cos y = \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{10}\sqrt{\sqrt{5}-1}}{8} = \frac{\sqrt{10\left(\sqrt{5}+1\right)^2\left(\sqrt{5}-1\right)}}{8} = \frac{\sqrt{10\left(\sqrt{5}+1\right)}}{4}$$

$$\sin^2 2y = \frac{5\left(\sqrt{5}+1\right)}{8}$$

$$\cos 4y = 1-2\sin^2 2y = 1-\frac{5\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} = -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\cos 4y = -\sin y = -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)}$$

On en déduit que :

$$\cos 4y = -\sin y = \sin(-y) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)$$

et donc que :

$$4y = \pm\left(\frac{\pi}{2}+y\right) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

(a) $4y = \dfrac{\pi}{2} + y + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad y = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{3}$

Les deux solutions appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sont :

$y = \frac{\pi}{6}$ à rejeter puisque $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \neq \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$y = -\frac{\pi}{2}$ à rejeter puisque $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

(b) $4y = -\dfrac{\pi}{2} - y + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad y = -\dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{2\pi}{5}$

Les deux solutions appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sont :

$y = -\frac{\pi}{10}$ à rejeter puisque $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) < 0$

$y = \frac{3\pi}{10}$ solution acceptable.

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{y = \frac{3\pi}{10} = 54°}$$

Solution proposée par Jacques Collot

$$y=\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\Rightarrow \sin(y)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Remarquons que $1>\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ce qui implique $\dfrac{\pi}{2}>y>\dfrac{\pi}{4}$ $\quad (1)$

$$\cos(4y)=1-2\sin^2(2y)=1-8\sin^2(y).\cos^2(y)=1-8\sin^2(y)\left(1-\sin^2(y)\right)$$

Or $\sin^2(y)=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}\left(3+\sqrt{5}\right)$

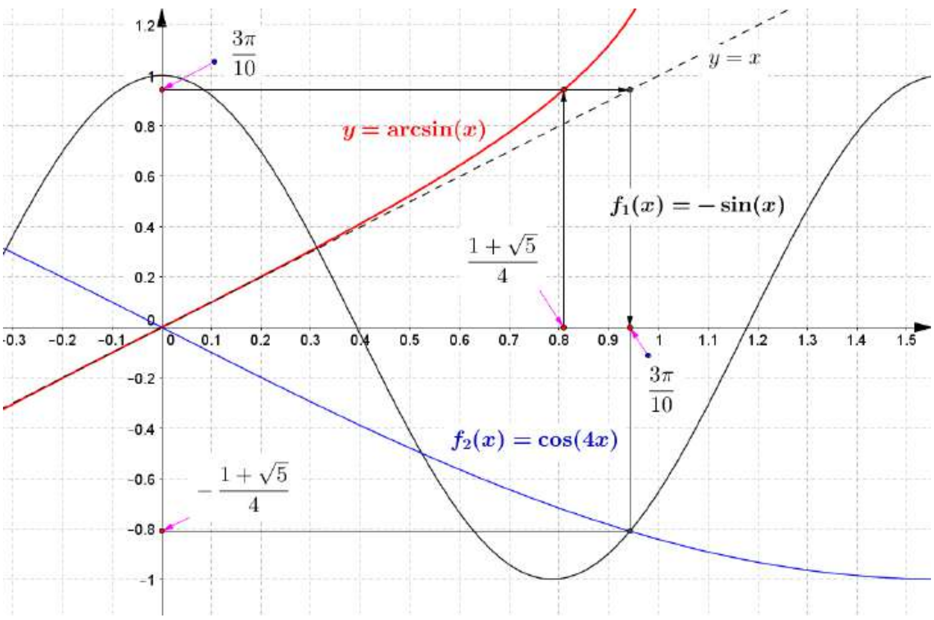
$$\Rightarrow \cos(4y)=1-8\frac{1}{8}\left(3+\sqrt{5}\right)\left(1-\frac{1}{8}\left(3+\sqrt{5}\right)\right)=1-\frac{1}{8}\left(3+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(8-15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+5\right)=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}=-\sin(y)$$

Il faut maintenant résoudre :

$$\cos(4y)=-\sin(y)\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-4y\right)=\sin(-y)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-y=\dfrac{\pi}{2}-4y+2k\pi\\[2ex] -y=\pi-\dfrac{\pi}{2}+4y+2k\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}\ \text{ A rejeter en vertu de } (1)\\[2ex] y=-\dfrac{\pi}{10}+2k\pi\ \text{ ou }\ \boxed{y=\dfrac{3\pi}{10}}\end{cases}$$



Le 30 juin 2015. Modifié le 1 septembre 2015

EXTRI403 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2015.

Un homme désire mesurer la hauteur d'un arbre qui se trouve au fond de son jardin. Depuis la porte de sa maison, il voit l'arbre sous en angle de 6°, ayant avancé de dix mètres, il le voit sous un angle de 9°. En négligeant la taille de l'homme devant les dimensions de l'arbre et du jardin, en supposant que l'arbre pousse perpendiculairement au sol et que ce dernier est horizontal, déterminer la longueur du jardin et la hauteur de l'arbre.
En cas de chute, l'arbre risque-t-il de toucher la maison?
Indication: pour évaluer numériquement les fonctions trigonométriques qui pourraient intervenir dans le calcul, utiliser l'approximation suivante

$$f(x) \approx f(0) + xf'(0) \qquad (1)$$

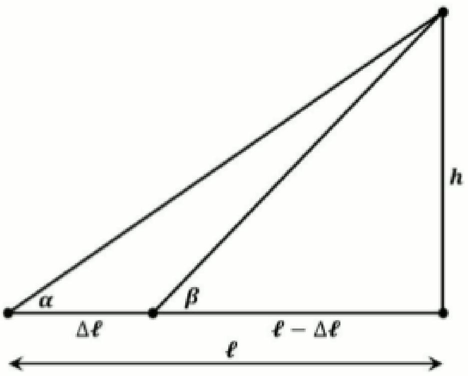
où f est une fonction trigonométrique (sin, cos ou tan), x est l'angle exprimé en radian et f' est la dérivée première de f.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Partie 1 Expression générale.

On cherche d'abord des expression générales qui donnent la hauteur h et la distance ℓ de l'arbre en termes des données $\Delta\ell$, α et β indiquées dans la figure à droite.

(Cette partie est quasiment identique à l'exercice EXTRI376)



$$\tan\beta = \frac{h}{\ell - \Delta\ell} \quad \Rightarrow \quad \ell - \Delta\ell = \frac{h}{\tan\beta}$$

$$\tan\alpha = \frac{h}{\ell} = \frac{h}{\Delta\ell + (\ell - \Delta\ell)} = \frac{h}{\Delta\ell + \dfrac{h}{\tan\beta}}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{h\tan\beta}{\Delta\ell\tan\beta + h} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\ell\tan\alpha\tan\beta + h\tan\alpha = h\tan\beta$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{h = \Delta\ell\,\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\ell = \frac{h}{\tan\alpha}}$$

Partie 2 Calcul numérique

Pour l'approximation numérique on a : $f(x) = \tan x \qquad f(0) = 0$
$f'(x) = 1 + \tan^2 x \qquad f'(0) = 1$

$$\Rightarrow \quad \tan x \cong x \text{ (en radians)}$$

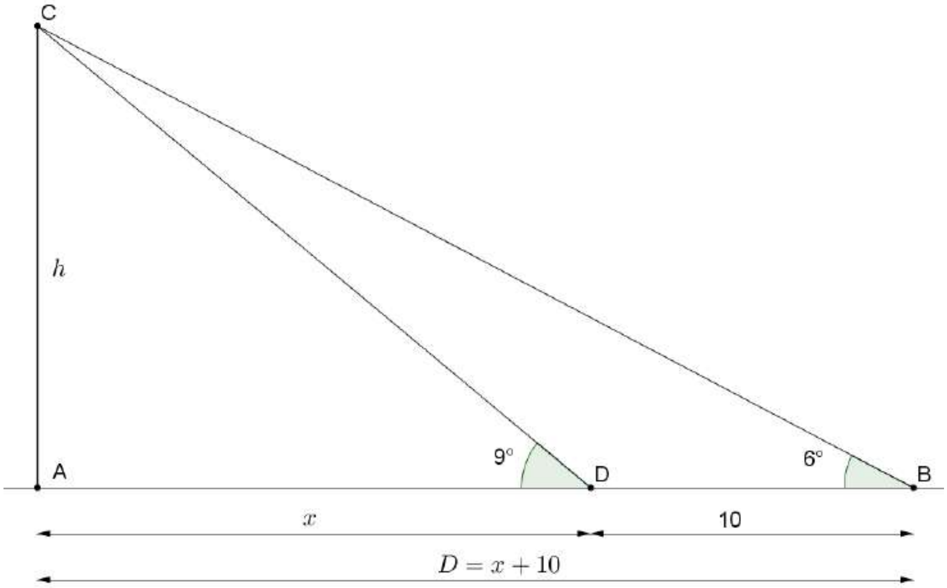
On retient 4 décimales dans le calcul, et on arrondit le résultat final.

$$\alpha = 6° = \frac{6\pi}{180} = \frac{\pi}{30} = 0{,}1047 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha \cong 0{,}1047$$

$$\beta = 9° = \frac{9\pi}{180} = \frac{\pi}{20} = 0{,}1571 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \tan\beta \cong 0{,}1571$$

$$h = 10\,\frac{0{,}1047\,.\,0{,}1571}{0{,}1^3571 - 0{,}1047} = 3{,}139 \cong 3{,}14 \text{ m} \quad \text{et} \quad \ell = \frac{3{,}139}{0{,}1047} = 29{,}98 \cong 30 \text{ m}$$

Solution proposée par Jacques Collot



On a directement : $h = (x+10)\tan 6 = x\tan 9 \Rightarrow x = \dfrac{10\tan 6}{\tan 9 - \tan 6}$

Or $\tan 6 = \tan 0 + \dfrac{6\pi}{180}.\dfrac{1}{\cos^2 0} = \dfrac{\pi}{30}$ et $\tan 9 = \tan 0 + \dfrac{9\pi}{180}.\dfrac{1}{\cos^2 0} = \dfrac{\pi}{20}$

$\Rightarrow x = \dfrac{10\dfrac{\pi}{30}}{\dfrac{\pi}{20} - \dfrac{\pi}{30}} = 20 \text{ m} \Rightarrow h = 20\tan 9 = 20 \times \dfrac{\pi}{20} = \pi \text{ m}$

L'arbre ne risque pas de tomber sur la maison.

Le 30 juin 2015. Modifié le 1 septembre 2015

EXTRI404 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2014..

Les étoiles Duhhe et Alkaid dans la constellation de la Grande Ourse sont distantes de la Terre de 105 al et de 138 al respectivement (une année-lumière (al) est la distance parcourue par la lumière en une année). Depuis la Terre, leurs lignes de visée - c'est-à-dire les droites qui les relient à la Terre - sont séparées de 22.5°.

Calculez la distance entre ces deux étoiles en année-lumière .

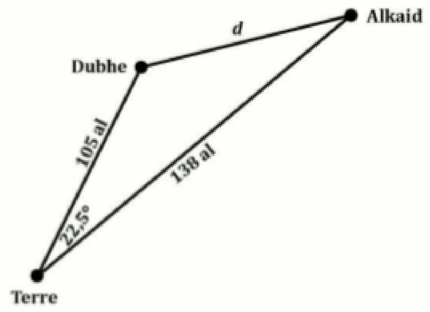
Solution proposée par Jan Frans Broeckx

1) Il s'agit d'une simple application du théorème d'Al Kashi :

$$\begin{aligned} d^2 &= 105^2 + 138^2 - 2.105.138.\cos 22{,}5° \\ &= 11025 + 19044 - 28980.0{,}92388 \\ &= 3294{,}97 \end{aligned}$$

$$d = \sqrt{3294{,}97} = \mathbf{57{,}4\ al}$$

où nous avons utilisé la calculatrice pour calculer cos 22,5° et la racine carrée.



2) Cependant, l'exercice doit être résolu **sans calculatrice**, et le calcul manuel d'une racine carrée n'est plus enseigné au secondaire. Pour cela, nous utiliserons l'approximation linéaire d'une fonction :

$$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \qquad \text{(avec } h \text{ petit)}$$

ce qui, pour $f(x) = \sqrt{x}$, devient :

$$\sqrt{a+h} \approx \sqrt{a} + \frac{h}{2\sqrt{a}}$$

où a est un argument, proche de $a+h$, pour lequel $\sqrt{a}$ est facile à calculer mentalement.

Pour le calcul de cos 22,5° nous utilisons une des formules de Carnot, et nous prenons $\sqrt{2} \approx 1{,}4$:

$$\cos^2 22{,}5° = \frac{1}{2}(1 + \cos 45°) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$$

$$\cos 22{,}5° = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx \frac{1}{2}\sqrt{3{,}4} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 0{,}6} \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{4} - \frac{0{,}6}{2\sqrt{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{0{,}6}{4}\right) = \frac{1}{2}.1{,}85$$

Par conséquent :

$$d^2 = 105^2 + 138^2 - 2.105.138.\cos 22{,}5° \approx 105^2 + 138^2 - 2.105.138.\frac{1}{2}.1{,}85 = 3262{,}5$$

$$d = \sqrt{3262{,}5} = \sqrt{3025 - 237{,}5} \approx \sqrt{3025} + \frac{237{,}5}{2\sqrt{3025}} = 55 + \frac{237{,}5}{110} \approx 55 + 2{,}1 = \mathbf{57{,}1\ al}$$

ce qui est à moins de 1% de la valeur exacte.

Le 1 septembre 2015. Modifié le 11 mars 2013 (Jan Frans Broeckx)

EXTRI405 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2014.

Prouvez l'égalité suivante :

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Prenons la tangente du membre de gauche :

$$\begin{aligned}\tan\left(4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right) &= \frac{\tan\left(4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)-\tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right)}{1+\tan\left(4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)\tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right)}\\ &= \frac{\tan\left(4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)-\frac{1}{239}}{1+\frac{1}{239}\tan\left(4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)} \qquad (1)\end{aligned}$$

Nous avons maintenant besoin d'une formule pour exprimer $\tan 4a$ en termes de $\tan a$. Partons de la formule pour $\tan 2a$:

$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

que nous appliquons deux fois de suite :

$$\begin{aligned}\tan 4a &= \tan(2(2a)) = \frac{2\tan 2a}{1-\tan^2 2a}\\ &= \frac{2\,\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}}{1-\left(\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}\right)^2} = \frac{4\tan a\ (1-\tan^2 a)}{(1-\tan^2 a)^2-4\tan^2 a}\\ &= \frac{4\tan a-4\tan^3 a}{1-6\tan^2 a+\tan^4 a}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\tan\left(4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{\frac{4}{5}-\frac{4}{125}}{1-\frac{6}{25}+\frac{1}{625}} = \frac{\frac{100-4}{125}}{\frac{625-150+1}{625}} = \frac{5.96}{476} = \frac{480}{476} = \frac{120}{119}$$

On remplace ce résultat dans l'expression (1) :

$$\tan\left(4\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right) = \frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{1}{239}\cdot\frac{120}{119}} = \frac{120.239-119}{119.239+120} = \frac{28561}{28561} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

Solution proposée par Jacques Collot

A titre informatif, voici une méthode qui utilise une formule d'Euler qui n'est pas sensée être connue par un élève du secondaire :

$$\arctan\frac{1}{n}=\arctan\frac{1}{n+p}+\arctan\frac{p}{n^2+np+1}$$

La démonstration de la formule est donnée ci-dessous. Appliquons plusieurs fois cette formule.

$$\frac{\pi}{4}=\arctan 1=\arctan\frac{1}{1+4}+\arctan\frac{4}{1+4+1}$$

$$=\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{2}{3}=\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{7}{2}}+\arctan\frac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{4}+\frac{21}{4}+1}$$

$$=2\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{7}{17}=2\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{\frac{17}{7}+\frac{18}{7}}+\arctan\frac{\frac{18}{7}}{\left(\frac{17}{7}\right)^2+\frac{17}{7}.\frac{18}{7}+1}$$

$$=3\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{9}{46}=3\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{\frac{46}{9}-\frac{1}{9}}+\arctan\frac{-\frac{1}{9}}{\left(\frac{46}{9}\right)^2-\frac{46}{9}.\frac{1}{9}+1}$$

$$=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$$

Annexe

La vérification de la formule est très simple :

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{n+p}+\arctan\frac{1}{n^2+np+1}\right)=\frac{\frac{1}{n+p}+\frac{p}{n^2+np+1}}{1-\frac{1}{n+p}.\frac{p}{n^2+np+1}}$$

$$=\frac{n^2+np+1+np+p^2}{n^2+n^2p+n+n^2p+p-p}=\frac{1}{n}$$

La formule permet d'établir de nombreuses expressions de la forme

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{n_1}+\arctan\frac{1}{n_2}+\ldots+\arctan\frac{1}{n_n}$$

Ces expressions permettent d'estimer la valeur de π.

Voir : le fascinant nombre π. p-90, 91, Jean-Paul Delahaye. Belin

Le 1 septembre 2015

EXTRI406 – POL, ERM, Bruxelles, 2007.

Dans un triangle ABC, on a la relation $\sin\left(A+\dfrac{B}{2}\right)=k\cdot\sin\dfrac{B}{2}$ où k est une constante réelle positive.

Démontrer que $\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{k-1}{k+1}$.

Solution proposée par Hugues Vemeiren

De l'hypothèse, on tire $k=\dfrac{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}}$

$$\frac{k-1}{k+1}=\frac{\dfrac{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}}-1}{\dfrac{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}}+1}=\frac{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)-\sin\frac{B}{2}}{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)-\sin\frac{B}{2}}$$

Par les formules d'addition, de duplication et de Carnot :

$$\begin{aligned}
\frac{k-1}{k+1}&=\frac{\sin A\cdot\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cdot\cos A-\sin\frac{B}{2}}{\sin A\cdot\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cdot\cos A+\sin\frac{B}{2}}\\
&=\frac{\sin A\cdot\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cdot(\cos A-1)}{\sin A\cdot\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cdot(\cos A+1)}\\
&=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cdot\left(-2\sin^2\frac{A}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cdot\left(2\cos^2\frac{A}{2}\right)}\\
&=\frac{\sin\frac{A}{2}\cdot\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\cdot\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\right)}\\
&=\tan\frac{A}{2}\cdot\frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}=\tan\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{A+B}{2}
\end{aligned}$$

Mais dans un triangle $C=\pi-(A+B)$, donc $\tan\dfrac{C}{2}=\tan\dfrac{\pi-(A+B)}{2}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A+B}{2}\right)=\cot\frac{A+B}{2}$

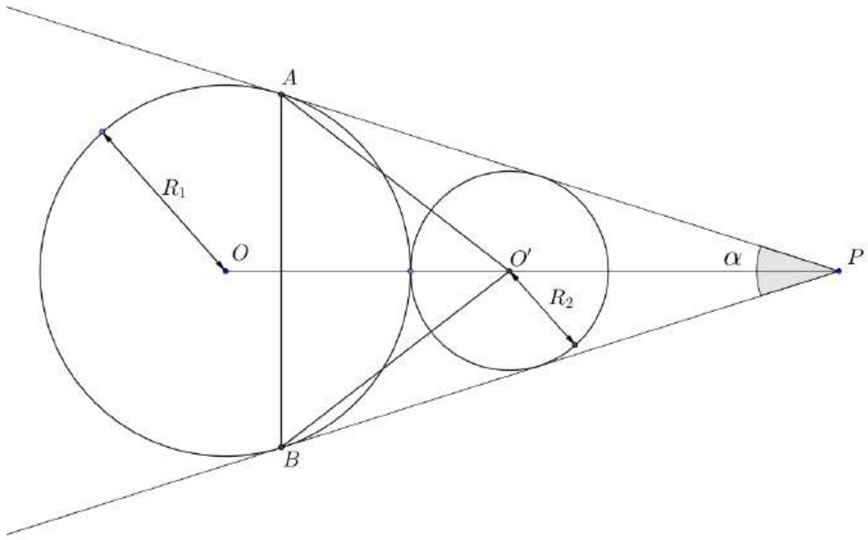
On a bien, finalement: $\dfrac{k-1}{k+1}=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}$

---

10 novembre 2014

EXTRI407 – EPL, UCL, LLN, juillet, 2015.

On considère deux cercles tangents extérieurement de centres O et O' et de rayons R_1 et R_2 (avec $R_1 > R_1$) comme représentés à la figure ci-dessous.

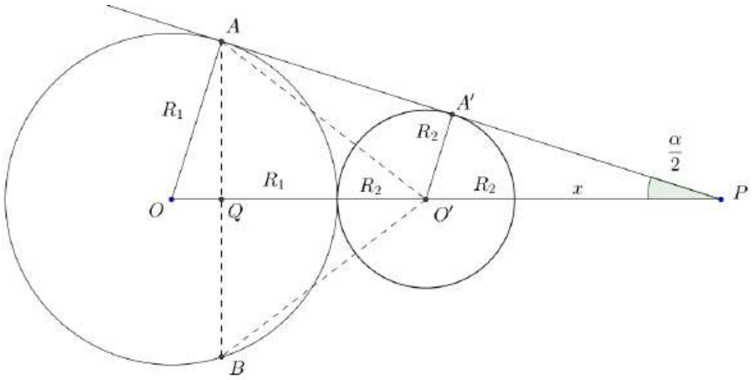


1. Les tangentes communes aux deux cercles forment entre elles un angle α. Formulez une relation simple entre cet angle α et les rayons des cercles, R_1 et R_2.
2. Déduisez-en pour quelle valeur du rapport R_1 / R_2 est de 90°.
3. Dans le cas où $R_1 = 6\,[\mathrm{m}]$ et $R_2 = 2\,[\mathrm{m}]$, calculez l'angle α et le périmètre du triangle ABO' (Voir figure : A et B sont les points de tangence au cercle de centre O et de rayon R_1, des tangentes communes aux deux cercles considérés).

Remarques :

- Justifier vos affirmations et préciser vos hypothèses.
- Vos résultats de calcul peuvent se présenter sous la forme de fractions comportant éventuellement radicaux (Veillez cependant à simplifier aux maximum vos réponses).

Solution proposée par Nicole Berckmans



1. Dans les triangles rectangles AOP et $A'O'P$, on a

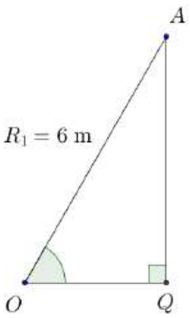
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R_1}{R_1+2R_2+x}=\frac{R_2}{R_2+x} \qquad (i)$$

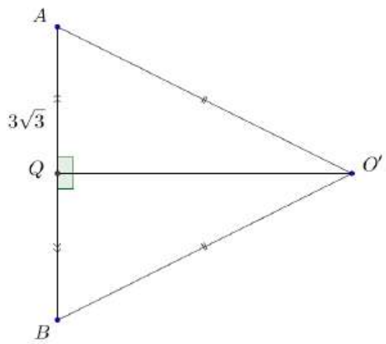
De (i), on tire $R_2+x=\dfrac{R_2\left(R_1+R_2\right)}{R_1-R_2}$.

Puisque $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{R_2}{R_2+x}$, on en déduit que

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R_1-R_2}{R_1+R_2}} \qquad \text{ou encore} \qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\dfrac{R_1}{R_2}-1}{\dfrac{R_1}{R_2}+1}$$

2. Si $\dfrac{\alpha}{2}=45°$ alors $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\dfrac{R_1}{R_2}-1}{\dfrac{R_1}{R_2}+1}\Rightarrow\boxed{\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$





3. Si $R_1 = 6$ et $R_2 = 2$, alors $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6}$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Dans le triangle AQO :

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{OQ}{R_1} \quad \text{donc } OQ = 3\ [\text{m}]$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AQ}{R_1} \quad \text{donc } AQ = 3\sqrt{3}\ [\text{m}]$$

D'autre part : $OO' = R_1 + R_2 = 8\ [\text{m}]$. Dès lors $QO' = 5\ [\text{m}]$

Aire du triangle $AO'B = \frac{1}{2} \times 5 \times 6\sqrt{3} = 15\sqrt{3}\ [\text{m}^2]$

$\overline{AO'} = \sqrt{5^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{13}$

Périmètre du triangle $AO'B = 6\sqrt{3} + 4\sqrt{13}\ [\text{m}]$

17 septembre 2015

EXTRI408 – EPL, UCL, LLN, juillet, 2015.

Résoudre

$$\cos x + \sin 3x = \cos 2x$$

Indiquer les solutions sur le cercle trigonométrique $[0, 2\pi]$

Solution proposée par Nicole Berckmans

$$\sin 3x = \cos 2x - \cos x \Rightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2} = -2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} \text{ (Simpson)}$$

$$1)\ \sin\frac{3x}{2} = 0 \quad , \quad \frac{3x}{2} = k\pi \quad , \quad x = \frac{2k\pi}{3}$$

$$S_1 = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$$

$$2)\ \cos\frac{3x}{2} = -\sin\frac{x}{2} \Rightarrow \cos\frac{3x}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

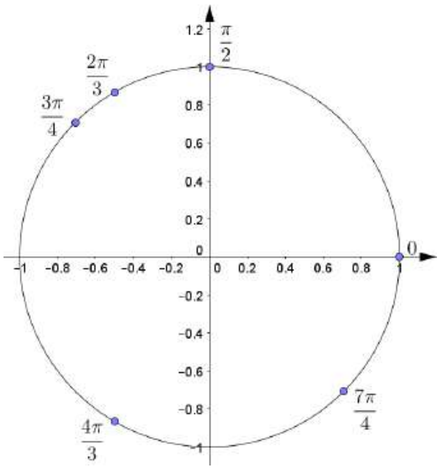
$$\frac{3x}{2} = \pm\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + 2k\pi$$

$$2.1)\ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$S_2 = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$2.2)\ \frac{3x}{2} = -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$S_3 = \left\{\frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$$



---

17 septembre 2015

EXTRI409 – EPL, UCL, LLN, juillet, 2015.

Cochez chaques fois l'unique affirmation vraie parmi les trois possibilités.

Réponse juste = 1 point; autre réponse = 0.

- Dans un triangle équilatéral le rapport entre la longueur des côtés et le rayon du cercle circonscrit est égal à

  $\sqrt{2}$ ☐ $\qquad$ $\sqrt{3}$ ☐ $\qquad$ 2 ☐

- Dans l'intervalle $0 < x < \frac{\pi}{2}$, l'équation $\cos x = \tan x$ admet exactement

  0 solution ☐ $\qquad$ 1 solution ☐ $\qquad$ 2 solutions ☐

- L'expression $\cos^2(a+b) + \cos^2(a-b)$ est identiquement égale à

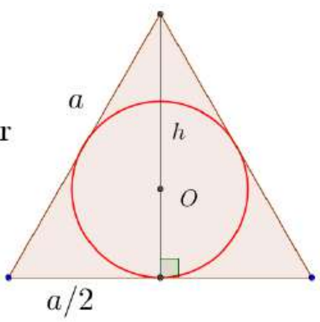
  $1+\cos 2a \cos 2b$ ☐ $\qquad$ $1+\cos^2 a \cos^2 b$ ☐ $\qquad$ $1+\cos^4 a \cos^4 b$ ☐

- Si dans le triangle ABC de côtés a, b et c (opposés aux angles respectifs A, B et C), on a que $C = 120°$ et $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, alors

  $B = 30°$ ☐ $\qquad$ $B = 45°$ ☐ $\qquad$ $B = 60°$ ☐

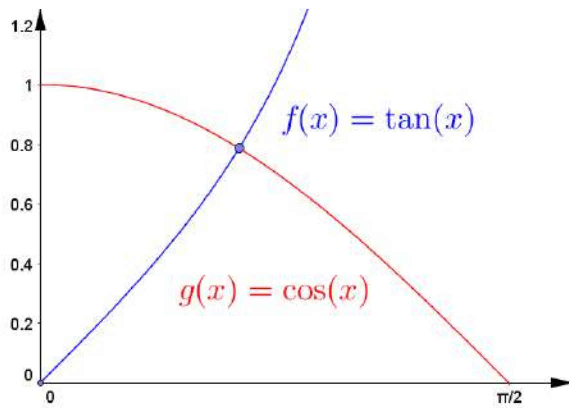
Solution proposée par Nicole Berckmans

1) Rép : $\sqrt{3}$ car



$$\frac{a}{R} = \frac{a}{\frac{2}{3}h} = \frac{a}{\frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{a}{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \sqrt{3}$$

2) Rép : 1 solution



3) Rép : $1+\cos 2a.\cos 2b.$

On le vérifie pour $a=\dfrac{\pi}{2}$ et $b=0$

4) Rép : $B=45°$

En effet si $B=30°$ alors $A=30°$ et $a=b$

si $B=60°$ alors $A=180°-120°-60°<0$

17 septembre 2015