

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 44

EXTRI440-EXTRI449

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Janvier 2017

EXTRI440 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2016.

Si A, B et C désignent les angles d'un triangle et a, b et c les longueurs des côtés opposés à ces angles, montrez que

$$\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{a+b+c}{2a} \sin \frac{A}{2}$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Dans un triangle non dégénéré, $a \neq 0$. Il n'y a donc pas de conditions d'existence pour cette relation. Aussi, $0 < A < \pi$, et donc $\sin \frac{A}{2} \neq 0$ et $\cos \frac{A}{2} \neq 0$, dont nous aurons besoin dans la suite.

A l'aide de la règle aux sinus,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r \quad (r = \text{rayon du cercle circonscrit})$$

on transforme le membre droit, dans le but d'aboutir au membre gauche :

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{2a} \sin \frac{A}{2} &= \frac{2r(\sin A + \sin B + \sin C)}{2r(2 \sin A)} \sin \frac{A}{2} \\ &= \frac{\sin A + (\sin B + \sin C)}{2 \sin A} \sin \frac{A}{2} \\ &= \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} \sin \frac{A}{2} \quad \left(\sin \frac{A}{2} \neq 0 \right) \\ &= \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{\pi-A}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{A}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{A}{2}} \quad \left(\cos \frac{A}{2} \neq 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi - (B+C)}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right) \\ &= \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \end{aligned}$$

EXTRI441 – POLYTECH, UMONS, Mons, juillet 2016.

Démontrer que l'identité suivante est vérifiée dans tout triangle ABC :

$$\frac{\sin B}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)} = \frac{2b \cos\left(\frac{A}{2}\right)}{b+c}$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Dans le triangle ABC , on a : $A + B + C = 2\pi \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}$.

On a aussi : $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = b \frac{\sin C}{\sin B} \Rightarrow b+c = b \left(1 + \frac{\sin C}{\sin B}\right) = b \frac{\sin B + \sin C}{\sin B}$

L'expression à démontrer devient alors :

$$\frac{\cancel{\sin B}}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{2 \cancel{b} \sin \frac{B+C}{2}}{\cancel{b} (\sin B + \sin C)} \cdot \cancel{\sin B} \Rightarrow \frac{1}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2}}{\sin B + \sin C}$$

$$\Rightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}$$

Expression qui est vraie en vertu des relations de Simpson.

Solution proposée par Jacques Collot

L'expression à démontrer peut se réécrire : $\frac{\sin B}{b} = \frac{2 \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{A}{2}}{b+c}$ (1)

Or : $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k$. Il suffit donc de prouver que le deuxième membre de (1) est égal à k .

En effet, sachant que $A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}$, et en appliquant

Simpson, on a : $\frac{2 \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{A}{2}}{b+c} = \frac{2 \cos \frac{B-C}{2} \sin \frac{B+C}{2}}{b+c} = \frac{\sin B + \sin C}{b+c} = \frac{k(b+c)}{b+c} = k$

EXTRI442 – POLYTECH, UMONS, Mons, juillet 2016.

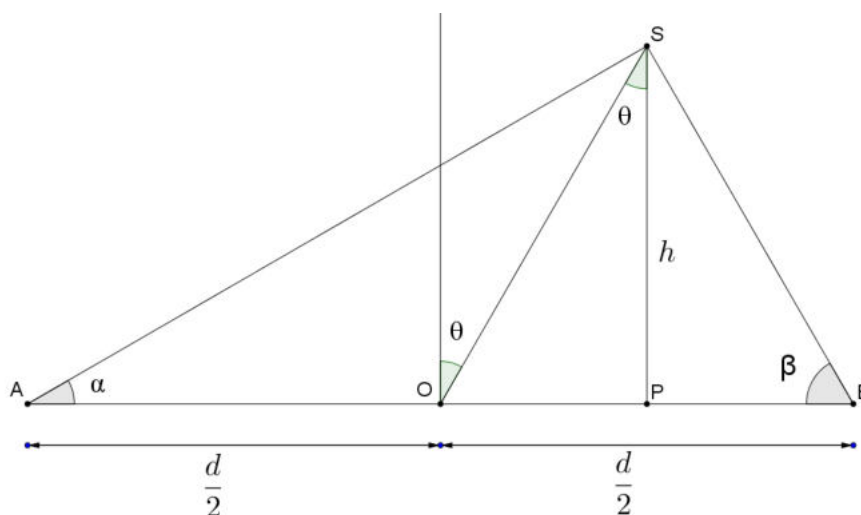
Soient deux observateurs A et B situés au niveau du sol, supposé parfaitement horizontal, ainsi qu'un mât dressé de manière rigide en un point O situé à mi-distance de AB et incliné d'un angle θ par rapport à la verticale dans le plan formé par AB et le mât.

L'observateur A voit le mât, du point O à son sommet S , sous un angle α , alors que l'observateur B voit le mât OS sous un angle β supérieur à α .

Exprimer l'angle θ en fonction des angles α et β , de la distance d entre les deux observateurs et de la hauteur h abaissée du mât perpendiculairement au sol.

Calculer ensuite en degrés la valeur numérique de l'angle θ si $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$ et que le rapport $d / h = 4 / \sqrt{3}$.

Solution proposée par Fabienne Zoetard



On a dans le ΔSOP : $\tan \theta = \frac{\overline{OP}}{h} \Rightarrow \overline{OP} = h \tan \theta$.

On en déduit que $\overline{PB} = \frac{d}{2} - h \tan \theta$ et $\overline{PA} = \frac{d}{2} + h \tan \theta$.

D'autre part :

$$\Delta PSB \Rightarrow \tan \beta = \frac{h}{\overline{PB}} = \frac{h}{\frac{d}{2} - h \tan \theta} \quad \text{et} \quad \Delta PSA \Rightarrow \tan \alpha = \frac{h}{\overline{PA}} = \frac{h}{\frac{d}{2} + h \tan \theta}$$

Ce qui donne successivement :

$$\tan \beta \left(\frac{d}{2} - h \tan \theta \right) = \tan \alpha \left(\frac{d}{2} + h \tan \theta \right) \Rightarrow \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{\frac{d}{2} + h \tan \theta}{\frac{d}{2} - h \tan \theta}$$

$$\Rightarrow \tan \beta \cdot d - 2h \tan \beta \tan \theta = \tan \alpha \cdot d + 2h \tan \alpha \tan \theta$$

$$\Rightarrow \tan \theta \cdot 2h (\tan \alpha + \tan \beta) = (\tan \beta - \tan \alpha) d$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan \theta = \frac{d}{2h} = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\tan \beta + \tan \alpha}}$$

$$\text{Si } \alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ \text{ et } \frac{d}{h} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \theta = \frac{4}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

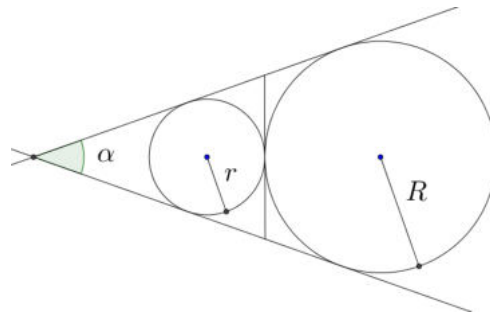
$$\Rightarrow \boxed{\theta = 30^\circ}$$

EXTRI443 - POLYTECH, UMONS, Mons, septembre 2016.

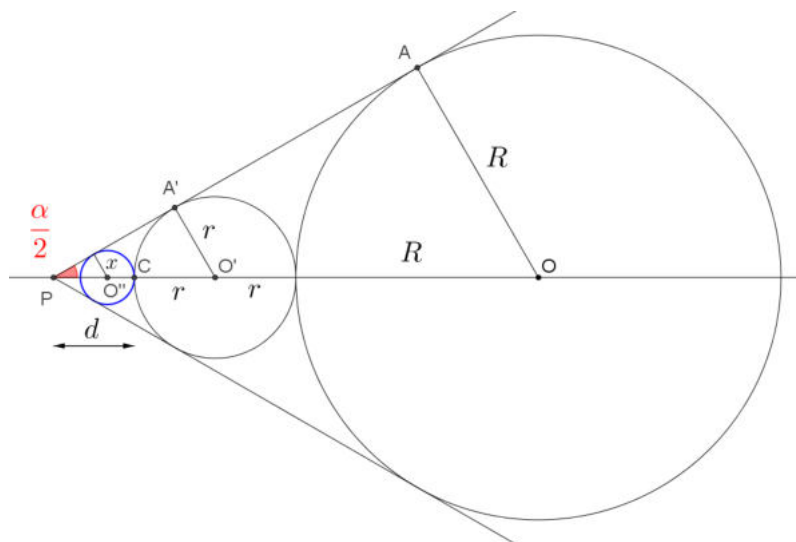
Soient deux cercles tangents entre eux et de rayons différents, ainsi que les deux droites tangentes de manière commune à ces deux cercles. Exprimer l'angle α que forment ces deux droites en fonction des rayons respectifs r et R des deux cercles.

Soit un troisième cercle, tangent au plus petit des deux cercles précédents et également tangent aux deux droites précédentes. Exprimer le rayon x de ce troisième cercle en fonction des rayons respectifs r et R des deux premiers cercles.

Calculer la valeur numérique de l'angle α ainsi que celle du rayon x si $r = 4$ cm et $R = 12$ cm.



Voir aussi EXTRI308 et EXTRI407



Dans les triangles rectangles $PA'O'$ et PAO , on a

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{r+d} \quad (1) \quad \text{et} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{R+2r+d} \quad (2)$$

De (1), on tire : $r+d = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ et on remplace dans (2) $\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{R+r + \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}}$

$$\Rightarrow \cancel{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{R \cancel{\sin \frac{\alpha}{2}}}{\sin \frac{\alpha}{2} (R+r) + r} \Rightarrow \boxed{\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R-r}{R+r}}$$

Pour calculer x , il suffit d'appliquer la formule précédente :

$$\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R-r}{R+r} = \frac{r-x}{r+x} \Rightarrow \frac{R-r}{R+r} r + \frac{R-r}{R+r} x = r-x \Rightarrow x \left(1 + \frac{R-r}{R+r} \right) = r \left(1 - \frac{R-r}{R+r} \right)$$

$$\Rightarrow x = r \frac{R+r-R+r}{R+r+R-r} \Rightarrow \boxed{x = \frac{r^2}{R}}$$

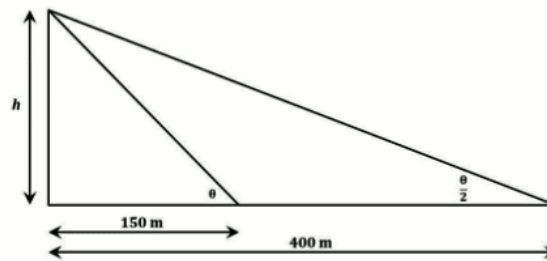
Si $r = 4$ cm et $R = 12$ cm $\Rightarrow \boxed{x = \frac{4}{3}}$

EXTRI444 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2017.

Un ingénieur souhaite déterminer la hauteur d'un gratte-ciel en mesurant la longueur de son ombre. A midi, la direction du soleil forme un angle θ par rapport à l'horizon (angle d'élévation) et l'ombre s'étend à 150 m de la base du gratte-ciel. A un certain instant dans l'après-midi, lorsque le soleil a baissé dans le ciel et l'angle d'élévation prend une valeur moitié de celle qui était observé à midi, l'ombre du gratte-ciel couvre une distance de 400 m. Quelle est la hauteur du gratte-ciel ?

Indication. On assimile ici le gratte-ciel à un segment vertical touchant le sol en l'une de ses extrémités. Le sol est supposé parfaitement horizontal.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx



La figure montre que $\tan \theta = \frac{h}{150}$ et $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{h}{400}$. Or, $\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$.

$$\text{Donc : } \frac{h}{150} = \frac{2 \frac{h}{400}}{1 - \left(\frac{h}{400}\right)^2} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{h}{400}\right)^2 = \frac{150}{200} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{h}{400}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{h}{400} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h = 200$$

La hauteur du bâtiment est de 200 m.

14 septembre 2017

Exprimer $\cos \theta$ en fonction de $\cos 2\theta$ et $\cos 3\theta$.
Discuter suivant la valeur de θ .

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(3\theta - 2\theta) = \cos 3\theta \cdot \cos 2\theta + \sin 3\theta \cdot \sin 2\theta \\ &= \cos 3\theta \cdot \cos 2\theta \pm \sqrt{(1 - \cos^2 3\theta)(1 - \cos^2 2\theta)} \end{aligned}$$

où le signe devant la racine est « + » si $\sin 3\theta$ et $\sin 2\theta$ sont de même signe, et « - » si $\sin 3\theta$ et $\sin 2\theta$ sont de signes opposés.

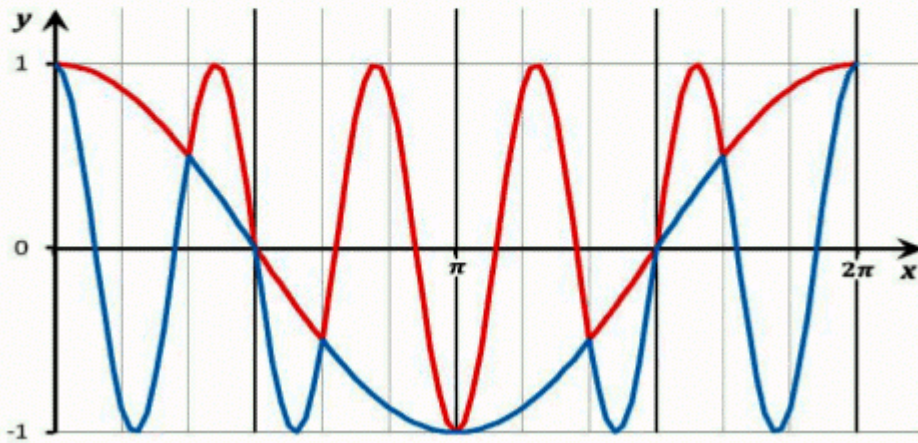
La fonction $\cos \theta = \cos(3\theta - 2\theta)$ est périodique de période 2π . Il suffit donc de discuter la formule pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

θ	2θ	3θ	$\sin 2\theta$	$\sin 3\theta$	$\cos \theta =$
$\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$	$\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$	$[0, \pi]$	≥ 0	≥ 0	$\cos 3\theta \cdot \cos 2\theta + \sqrt{(1 - \cos^2 3\theta)(1 - \cos^2 2\theta)}$
$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$	$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	≥ 0	≤ 0	$\cos 3\theta \cdot \cos 2\theta - \sqrt{(1 - \cos^2 3\theta)(1 - \cos^2 2\theta)}$
$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$	$\left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	≤ 0	≤ 0	$\cos 3\theta \cdot \cos 2\theta + \sqrt{(1 - \cos^2 3\theta)(1 - \cos^2 2\theta)}$
$\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$	$\left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$	$[2\pi, 3\pi]$	≤ 0	≥ 0	$\cos 3\theta \cdot \cos 2\theta - \sqrt{(1 - \cos^2 3\theta)(1 - \cos^2 2\theta)}$
$\left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right]$	$\left[2\pi, \frac{8\pi}{3}\right]$	$[3\pi, 4\pi]$	≥ 0	≤ 0	$\cos 3\theta \cdot \cos 2\theta - \sqrt{(1 - \cos^2 3\theta)(1 - \cos^2 2\theta)}$
$\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{8\pi}{3}, 3\pi\right]$	$\left[4\pi, \frac{9\pi}{2}\right]$	≥ 0	≥ 0	$\cos 3\theta \cdot \cos 2\theta + \sqrt{(1 - \cos^2 3\theta)(1 - \cos^2 2\theta)}$
$\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right]$	$\left[3\pi, \frac{10\pi}{3}\right]$	$\left[\frac{9\pi}{2}, 5\pi\right]$	≤ 0	≥ 0	$\cos 3\theta \cdot \cos 2\theta - \sqrt{(1 - \cos^2 3\theta)(1 - \cos^2 2\theta)}$
$\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$	$\left[\frac{10\pi}{3}, 4\pi\right]$	$[5\pi, 6\pi]$	≤ 0	≤ 0	$\cos 3\theta \cdot \cos 2\theta + \sqrt{(1 - \cos^2 3\theta)(1 - \cos^2 2\theta)}$

Remarque :

Dans le graphique ci-dessous, dans l'intervalle $[0, 2\pi]$:

- en rouge le graphique de $\cos 3\theta \cdot \cos 2\theta + \sqrt{(1 - \cos^2 3\theta)(1 - \cos^2 2\theta)}$
- en bleu le graphique de $\cos 3\theta \cdot \cos 2\theta - \sqrt{(1 - \cos^2 3\theta)(1 - \cos^2 2\theta)}$



14 septembre 2017

EXTRI446 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2017.
POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2017
EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 1
FACSA, ULG, Liège, juillet 2017

Résoudre dans \mathbb{R} : $2 \sin x + \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 3 \tan \frac{x}{2}$

et représenter les solutions comprises entre $-\pi$ et π sur le cercle trigonométrique.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard a proposé une solution identique.

CE : $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

On transforme d'abord l'équation comme suit

$$2 \sin x + \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 3 \tan \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2 \sin x + \cos x - 1 + \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) - 3 \tan \frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x + 2 \cos x - 1 - 3 \tan \frac{x}{2} = 0$$

Posons $\tan \frac{x}{2} = t$ et utilisons les formules qui expriment $\sin x$ et $\cos x$ en termes de $\tan \frac{x}{2}$

$$2 \frac{2t}{1+t^2} + 2 \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 - 3t = 0$$

On met le tout sur dénominateur commun $(1+t^2)$ qui ne peut jamais s'annuler :

$$\frac{4t + 2(1-t^2) - (1+t^2) - (1+3t)(1+t^2)}{1+t^2} = 0 \Rightarrow -3t^3 - 3t^2 + t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (t+1)(1-3t^2) = 0$$

Il y a donc trois familles de solutions

$$t = \tan \frac{x}{2} = -1 \quad \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$t = \tan \frac{x}{2} = +\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \Leftrightarrow x = +\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$t = \tan \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

La représentation des solutions sur le cercle trigonométrique est évidente et ne consiste qu'en trois points.

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$$2\sin x + \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} + 3\tan \frac{x}{2} \Rightarrow CE : x \neq \pi + 2k\pi$$

$$\Rightarrow 2\sin x + \cos x = 1 - \cos x + 3 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot 2$$

$$\Rightarrow 2\sin x + 2\cos x - 1 - \frac{3\sin x}{\cos x + 1} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sin x \cos x + 2\sin x + 2\cos^2 x + 2\cos x - \cos x - 1 - 3\sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x - \sin x + \cos 2x + \cos x = 0 \Rightarrow 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos \frac{3x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0 \Rightarrow 2\cos \frac{3x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \right) = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos \frac{3x}{2} \cdot 2\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow \cos \frac{3x}{2} \cdot \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$1) \cos \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$2) \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Les solutions principales sont : $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$

14 septembre 2017

EXTRI447 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2017.

Démontrer que si la condition suivante est vérifiée :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)$$

alors

$$\sin^2(a+b) = (\sin(a) + \sin(b))^2$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Par hypothèse : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)$

Or $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

Donc on a : $\sin(a)\sin(b) = 0$

Si $\sin(a) = 0 \Rightarrow a = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et la thèse devient : $\sin^2(b+k\pi) = \sin^2(b)$ (1)

Si k est pair : $\sin(b+k\pi) = \sin(b)$ et (1) est vérifié.

Si k est impair : $\sin(b+k\pi) = -\sin(b)$ et (1) est vérifié.

Si $\sin(b) = 0$, on tire les mêmes conclusions car il suffit de permuter a et b .

EXTRI448 – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2017.

Soit un triangle quelconque ABC dont les côtés sont en progression arithmétique de raison r . L'aire de ce triangle est égale à celle du triangle équilatéral de même périmètre.

Etablir l'expression de l'angle de valeur intermédiaire du triangle ABC en fonction du rapport

$\frac{r}{a}$, si a désigne la longueur du côté opposé à l'angle cherché.

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$$\text{On a } \begin{cases} c = a - r \\ b = a + r \end{cases} \quad (0 \leq r < a)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = (a+r)^2 + (a-r)^2 - 2(a+r)(a-r) \cos A$$

$$a^2 = a^2 + 2ar + r^2 + a^2 - 2ar + r^2 - 2(a^2 - r^2) \cos A$$

$$2(a^2 - r^2) \cos A = a^2 + 2r^2 \Rightarrow \cos A = \frac{a^2 + 2r^2}{2(a^2 - r^2)} \Rightarrow \cos A = \frac{1 + 2\left(\frac{r}{a}\right)^2}{2\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)}$$

Il apparaît donc que nous n'avons pas besoin de savoir que l'aire du triangle est égale à l'aire du triangle équilatéral de même périmètre.

Inclure cette condition, nous amène au développement suivant.

Le périmètre du triangle ABC est égal à $3a$. Donc le côté du triangle équilatéral qui a le même

périmètre est égal à a et donc l'aire vaut $A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

La formule de Héron nous permet d'exprimer l'aire d'un triangle en fonction de la longueur de

ses côtés : $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où p est le demi-périmètre, donc $p = \frac{3a}{2}$

On a alors :

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a}{2} \left(\frac{3a}{2} - a \right) \left(\frac{3a}{2} - a + r \right) \left(\frac{3a}{2} - a + r \right) = \frac{3}{16} a^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a^2}{16} (a-2r)(a+2r) = \frac{3}{16} a^4 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 4r^2 = a^2 \Rightarrow r = 0$$

Autrement dit le triangle ABC est le triangle équilatéral et $\widehat{A} = 60^\circ$

Remarque : La formule de Héron ne fait pas partie du programme et nous arrivons à une expression indépendante de $\frac{r}{a}$. La question mériterait d'être plus claire.

EXTRI449 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017.

Cochez chaque fois l'unique affirmation vraie parmi les possibilités.

Réponse juste = 1 point ; autre réponse = 0.

- Lorsque l'élévation du soleil au dessus de l'horizon est de 60° , l'ombre d'une tour sur sol plat est longue de 80 m. Au départ de cette situation, de combien de degrés l'élévation du soleil doit-elle varier pour que la longueur de l'ombre devienne égale à 240 m ?

+45° +30° +15° -15° -30°

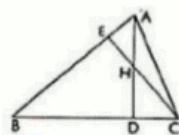
- On considère un trapèze ABCD, rectangle en A, et dont le côté oblique CD est perpendiculaire à la petite diagonale AC. Ce même côté oblique fait avec la grande base AD un angle de 30° . L'aire de ce trapèze, exprimée en fonction de la longueur d de la petite diagonale, est égale à :

$\sqrt{3}d^2$ $0,875\sqrt{3}d^2$ $0,625\sqrt{3}d^2$ d^2 $0,75d^2$

- L'expression $\arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ est égale à :

$-\frac{\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{4}$ aucune de ces valeurs

- Dans le triangle ABC représenté ci-dessous, la hauteur AD est coupée en son milieu H par la hauteur CE. Que peut-on affirmer ?



$\frac{\tan B}{\tan C} = 2$ $\tan B \tan(A + B) = -2$ $\tan B \tan C = 0,5$ $\tan B = \tan C$

- L'expression $\sin 7u - \sin 5u - 2 \cos 5u \sin 2u$ est identiquement égale à :

$2 \cos u \sin 4u$ $\cos 4u$ $-2 \cos 6u \sin 2u$ $-2 \cos 4u \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ 1

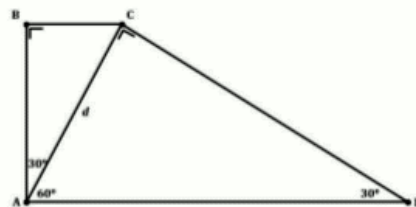
Solution proposée par Jan Frans Broeckx

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow \text{hauteur de la tour } h = 80\sqrt{3} \text{ m}$$

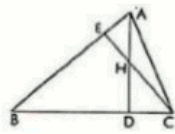
$$\text{Lorsque la longueur de l'ombre égale 240 m alors } \tan(\text{élévation}) = \frac{h}{240} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ \Rightarrow \boxed{-30^\circ}$$

$$\begin{aligned} \text{Aire} &= A_{ABC} + A_{ACD} = \frac{1}{2}|AB||BC| + \frac{1}{2}|AC||CD| \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}d}{2}\right)\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{1}{2}d(\sqrt{3}d) = \frac{5}{8}\sqrt{3}d^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{0,625\sqrt{3}d^2}$$



$$\tan\left(2 \arctan \frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{4} \quad \tan\left(\arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{4 + 21}{28 - 3} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

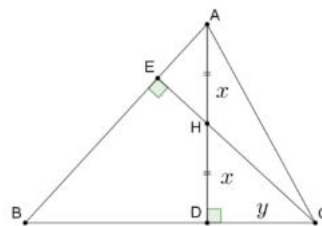


$$\left. \begin{array}{l} AD \perp BC \\ CE \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ECB} = \widehat{ABC} = \widehat{B}$$

$$\tan B = \tan \widehat{ECB} = \frac{|HD|}{|DC|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AD|}{|DC|} = \frac{1}{2} \tan C \Rightarrow \boxed{\frac{\tan B}{\tan C} = 0,5}$$

$$\begin{aligned} \sin 7u - \sin 5u - 2 \cos 5u \sin 2u &= 2 \sin u \cos 6u - 4 \cos 5u \sin u \cos u \\ &= 2 \sin u (\cos 6u - 2 \cos 5u \cos u) \\ &= 2 \sin u (\cos 6u - (\cos 6u + \cos 4u)) \\ &= -2 \sin u \cos 4u \\ &= \boxed{-2 \cos 4u \cos \left(\frac{\pi}{2} - u\right)} \end{aligned}$$

Variante de la question 4 proposée par Martine Devillers



$$\overline{AH} = \overline{HD} = x, \quad \overline{DC} = y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta HDC : \tan(90^\circ - B) = \frac{x}{y} \\ \Delta ADC : \tan C = \frac{2x}{y} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\tan C}{\tan(90^\circ - B)} = 2$$

$$\text{Or } \tan(90^\circ - B) = \frac{1}{\tan B} \Rightarrow \tan C \cdot \tan B = 2 \quad \text{Et comme } C = 180^\circ - (A + B)$$

$$\Rightarrow \tan(180^\circ - (A + B)) \cdot \tan B = 2 \Rightarrow \tan(A + B) \cdot \tan B = -2$$

18 septembre 2017