Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 45

EXTRI450-EXTRI459

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Janvier 2017

EXTRI450 – EPL, UCL, LLN, septembre 2017. EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2017 POLYTECH, UMons, Mons, septembre 2017 FACSA, ULiège, Liège, septembre 2017

1) Résolvez l'équation suivante en spécifiant les conditions d'existence.

$$2\sin^2 x \cot x + \sin 3x + \sin x = 0$$

2) Représentez sur le cercle trigonométrique les solutions comprises entre $-\pi$ et $+\pi$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

CE : $\cot x \in \mathbb{R} \iff \sin x \neq 0 \iff \boxed{x \neq k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})}$

Sous cette condition, on a que :

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x \cot x + \sin 3x + \sin x = 0 &\iff 2\sin x \cos x + (\sin 3x + \sin x) = 0 \\ &\iff 2\sin x \cos x + 2\sin 2x \cos x = 0 \\ &\iff \cos x\,(\sin 2x + \sin x) = 0 \end{aligned}$$

(a) $\cos x = 0$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})}$$

(b) $\sin 2x = -\sin x = \sin(-x)$

$2x = -x + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$

$3x = 2k\pi$

$x = k\,\dfrac{2\pi}{3}$

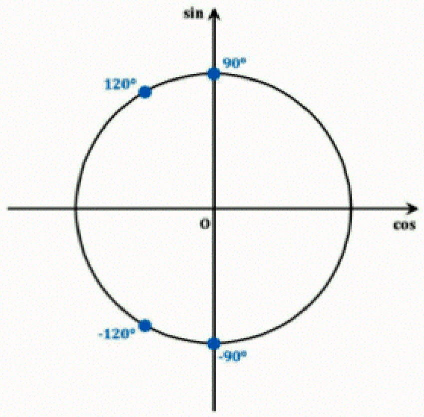
ou $2x = \pi + x + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$

$x = \pi + 2k\pi$

A rejeter par la CE.

Par la CE, il faut rejeter $k = 0, \pm 3, \pm 6, \ldots$, donc :

$\boxed{x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})}$ et $\boxed{x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})}$



---

18 septembre 2017

EXTRI451 – EPL, UCL, LLN, septembre 2017.

Cochez chaque fois l'unique affirmation vraie parmi les possibilités.

Réponse juste = 1 point ; autre réponse = 0.

- Dans le triangle ABC, rectangle en A, on a la relation suivante :

  $a + c = b\tan\frac{B}{2}$ ❑ $a - c = b\tan\frac{B}{2}$ ❑ $a = c\tan\frac{A}{2}$ ❑ $a - c = b\tan\frac{A-C}{2}$ ❑

- Dans un losange, si la mesure d'un des angles est de 60° et si la somme des longueurs des diagonales est égale à 16 m, alors la longueur des côtés est :

  $2\sqrt{3}$ [m] ❑ $4(\sqrt{3}-1)$ [m] ❑ $4\sqrt{3}-1$ [m] ❑ $8(\sqrt{3}-1)$ [m] ❑

- Si $\tan x = \frac{b}{a}$, alors $a\cos 2x + b\sin 2x$ est égal à

  $a + b$ ❑ $2a$ ❑ a ❑ aucune de ces valeurs ❑

- Si dans un triangle $C = 2\pi/3$ et $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ alors

  $B = \pi/2$ ❑ $B = \pi/3$ ❑ $B = \pi/4$ ❑ $B = \pi/6$ ❑

- L'expression $\sin 78° - \sin 18° + \cos 132°$ est égale à :

  $1/2$ ❑ -1 ❑ $\sqrt{3}/2$ ❑ 0 ❑

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

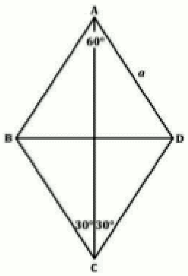
La règle aux sinus dans un triangle rectangle en A donne :

$$\frac{a}{\sin A} = a = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{c}{\cos B} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = a \sin B \\ c = a \cos B \end{cases}$$

A l'aide des formules qui expriment $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$, on trouve alors :

$$\frac{a-c}{b} = \frac{1-\cos B}{\sin B} = \frac{2\tan^2\frac{B}{2}}{2\tan\frac{B}{2}} = \tan\frac{B}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a - c = b\tan\frac{B}{2}}$$

<u>Remarque :</u> contrairement à l'affirmation qu'il y a une unique affirmation vraie, il y en a deux ici ; en effet, le triangle est rectangle en A et donc $B = \frac{\pi}{2} - C = A - C$ et la 4[e] affirmation est vrai aussi.



Grande diagonale : $|AC| = 2a\cos 30° = \sqrt{3}a$

Petite diagonale : $|BD| = 2a\sin 30° = a$

$|AC| + |BD| = (\sqrt{3}+1)a = 16$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{16}{\sqrt{3}+1} = \frac{16(\sqrt{3}-1)}{4} = 4(\sqrt{3}-1)$$

$$\boxed{a = 4(\sqrt{3}-1)}$$

$$\tan x = \frac{b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad b = a\tan x$$

$$a\cos 2x + b\sin 2x = a(1 - 2\sin^2 x) + \left(a\,\frac{\sin x}{\cos x}\right)(2\sin x\cos x) = a(1 - 2\sin^2 x + 2\sin^2 x) = a$$

$$\boxed{a\cos 2x + b\sin 2x = a}$$

$\boxed{B = \frac{\pi}{4}}$ parce qu'alors $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ce qui était donné.

$$\begin{aligned} \sin 78° - \sin 18° + \cos 132° &= 2\sin 30°\cos 48° + \cos 132° \\ &= \cos 48° + \cos 132° && (\sin 30° = 0{,}5) \\ &= 2\cos 90°\cos 84° = 0 && (\sin 90° = 0) \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin 78° - \sin 18° + \cos 132° \quad = \quad 0}$$

EXTRI452 – EPL, UCL, LLN, septembre 2017.

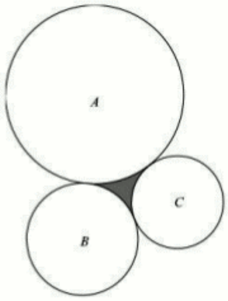
Trois cercles de centres A, B et C ont pour rayons respectifs

$$r_A = 50 \text{ cm}, \qquad r_B = 30 \text{ cm}, \qquad r_C = 20 \text{ cm}.$$

Ces trois cercles sont tangents deux à deux (voir figure).

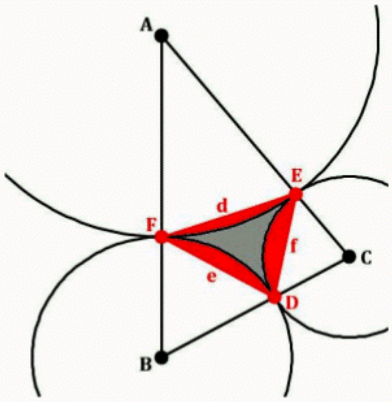
Calculez l'aire s de la surface grise comprise entre les trois cercles.

La différence entre votre réponse et la vraie valeur de s devra être plus petite en valeur absolue qu'un mm^2.



Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Appelons D, E et F les points de tangence entre les trois cercles, comme montré ci à droite. L'aire s de la surface grise est la différence de l'aire du triangle DEF et de la somme des aires des « calottes » comprises entre les cordes DE, EF et FD et les arcs de cercle qu'elles interceptent (en rouge sur la figure).



Ces aires, ainsi que la longueur des cordes qui constituent les côtés du triangle DEF, peuvent s'exprimer en termes du rayon du cercle et de l'angle au centre (voir ci-dessous).

Les longueurs des côtés du triangle ABC sont :

$a = |BC| = 80$ cm
$b = |AC| = 70$ cm
$c = |AB| = 80$ cm

La règle aux cosinus (théorème d'Al Kashi) permet de calculer les angles :

$$A = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = 0{,}666946 \text{ rad} \qquad B = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) = 1{,}047198 \text{ rad} = \frac{\pi}{3}$$

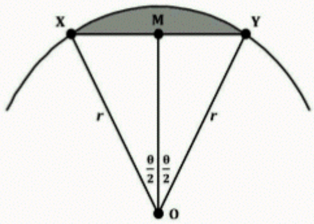
$$C = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = 1{,}427449 \text{ rad}$$

Comme le montre la figure ci contre, dans un cercle de rayon r, un angle θ au centre intercepte une corde de longueur :

$$|XY| = 2r\sin\frac{\theta}{2}$$

L'aire comprise entre l'arc intercepté et la corde est égale à :

$$s_\theta = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta) \qquad (\theta \text{ en rad})$$



En effet :

$$\begin{aligned} s_\theta &= (\text{aire secteur circulaire OXY}) - (\text{aire triangle OXY}) = \frac{\theta}{2\pi}(\pi r^2) - 2\left(\tfrac{1}{2}\overline{MX}.\overline{OM}\right) \\ &= \frac{1}{2}\theta r^2 - \left(r.\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(r.\cos\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\theta r^2 - \frac{1}{2}r^2\sin\theta = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta) \end{aligned}$$

Les côtés d, e et f du triangle DEF, et les aires s_A, s_B et s_C des trois calottes sont donc :

$d = |EF| = 2r_A \sin\frac{A}{2} = 32{,}7327$ cm $\qquad s_A = r_A{}^2(A - \sin A) = 60{,}4460$ cm^2

$e = |FD| = 2r_B \sin\frac{B}{2} = 30{,}0000$ cm $\qquad s_B = r_B{}^2(B - \sin B) = 81{,}5275$ cm^2

$f = |DE| = 2r_C \sin\frac{C}{2} = 26{,}1861$ cm $\qquad s_C = r_C{}^2(C - \sin C) = 87{,}5411$ cm^2

Le demi-périmètre du triangle DEF est $= \frac{1}{2}(d + e + f) = 44{,}4594$ cm . Son aire peut être calculée par la formule de Héron :

$s_{DEF} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 371{,}1537$ cm^2

Finalement, l'aire s de la partie grise entre les trois cercles est :

$s = s_{DEF} - (s_A + s_B + s_C) = 371{,}1537 - 229{,}5146 = 141{,}6391$ cm^2

Résultat final : $\boldsymbol{s = 141{,}64}$ **cm²**.

Solution proposée par Nicole Berckmans

Cette solution se réfère aux mêmes dessins que ceux de la solution précédente.

1) Cherchons les angles du triangle ABC dont on connait les 3 côtés.

On pourrait utiliser la rège aux cosinus pour l'angle $\widehat{A}$ et la règle aux sinus pour $\widehat{B}$ et $\pi - \widehat{A} - \widehat{B}$.

$$\widehat{A} = \arccos\frac{70^2 + 80^2 - 50^2}{2 \times 70 \times 80} = 0.666946 \text{ rad}$$

$$\frac{\sin\widehat{B}}{70} = \frac{\sin\widehat{A}}{50} \Rightarrow \widehat{B} = 1.047198 \text{ rad} \Rightarrow \widehat{C} = 1.427448 \text{ rad.}$$

2) Calculons l'aire du triangle ABC. Vous connaissez peut-être les formules donnant cette aire S : $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}$ ou la formule de Héron utiisée ci-dessus.

On peut retrouver la première formule facilement. Soit le triangle ABC et soit h la hauteur issue du sommet C. On a immédiatement :

$$\text{S} = \frac{1}{2}\overline{AB}.h = \frac{1}{2}.c.b\sin\widehat{A} = \frac{1}{2} \times 80 \times 70 \times \sin 0.666946 = 1732{,}0508 \text{ cm}^2$$

3) Calculons l'aire des 3 secteurs circulaires.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} \times 50^2 \times \widehat{A} = 833.6829 \text{ cm}^2 \\ \frac{1}{2} \times 30^2 \times \widehat{B} = 471.2389 \text{ cm}^2 \\ \frac{1}{2} \times 20^2 \times \widehat{C} = 285.4898 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Total} = 1590.4116 \text{ cm}^2$$

4) De l'aire du triangle ABC, on soustrait la somme des aires des 3 secteurs pour obtenir l'aire demandée : $1732{,}0508 - 1590.4116 = \boxed{141.64 \text{ cm}^2}$

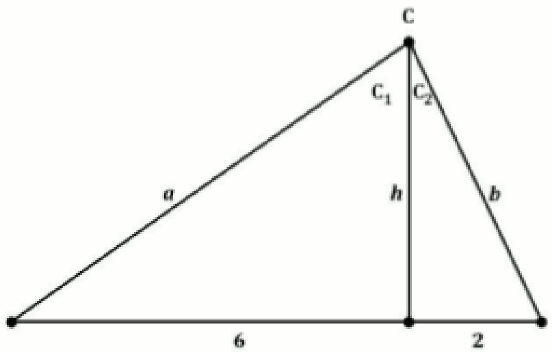
18 septembre 2017. Modifié le 14 mai 2018 (Nicole Berckmans)

EXTRI453 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2016.

Un marin voudrait déterminer la hauteur du mât de son voilier à l'aide d'une corde d'une longueur de 16 mètres. Il tend la corde en la faisant coulisser dans une poulie attachée au sommet du mât. Les points d'attache des deux extrémités de la corde sur le pont du voilier se trouvent à 6 mètres devant et 2 mètres derrière le pied du mât. Déterminer la longueur des deux segments de corde reliant la poulie à chacun des points d'attache, et en déduire la hauteur du mât. Ensuite calculer le sinus de l'angle que forme le coude de la corde au sommet du mât.

Indication. On néglige l'élasticité de la corde et l'on assimile les deux segments de corde à des segments de droite. On néglige les dimensions de la poulie, que l'on assimile à un point situé au sommet du mât.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx



$h^2 = a^2 - 36 = b^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 = 32 \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)(a-b) = 32$ avec $a + b = 16 \quad \Rightarrow \quad a - b = 2$

$\begin{cases} a + b = 16 \\ a - b = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} a = 9 \text{ m} \\ b = 7 \text{ m} \end{array}}$

$h = \sqrt{9^2 - 6^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = 3\sqrt{5} \text{ m}}$

$\sin C = \sin(C_1 + C_2) = \sin C_1 . \cos C_2 + \cos C_2 . \sin C_1 = \frac{2}{3} . \frac{3\sqrt{5}}{7} + \frac{\sqrt{5}}{3} . \frac{2}{7} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin C = \frac{8\sqrt{5}}{21}}$

---

9 octobre 2017

EXTRI454 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2016.

Calculer $\cos(202{,}5°)$

a) exactement ;

b) numériquement en en donnant une valeur approchée à 10% près.

Vérifier ce dernier résultat graphiquement.

Conseil : utiliser le développement de Taylor au second ordre, pour x proche de a :

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

a) $202{,}5° = 22{,}5° + 180° \quad \Rightarrow \quad \cos(202{,}5°) = -\cos(22{,}5°) = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 45°)}$

où nous avons utilisé une formule de Carnot. Par conséquent : $\boxed{\cos(202{,}5°) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

A l'aide de la calculatrice cette formule donne, à 5 décimales : $\cos(202{,}5°) = -0{,}92388$

b) Calculons numériquement la valeur de $\cos(22{,}5°)$, à l'aide du développement de Taylor au second ordre , et avec le choix suivant :

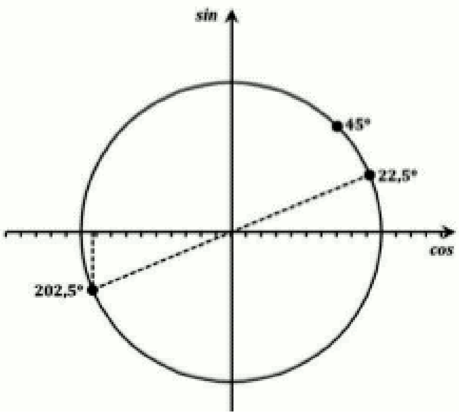
$x = 22{,}5°$ et $a = 30° \Rightarrow x - a = -7{,}5°$ ou en radians : $x = \frac{\pi}{8}$ et $a = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x - a = -\frac{\pi}{24}$

On a que : $f(a) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $f'(a) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ $f''(a) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

La formule donnée dans l'énoncé donne alors : $\boxed{\cos(22{,}5°) = \cos\frac{\pi}{8} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{48} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{24}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2}}$

A l'aide de la calculatrice, et à 5 décimales : $\cos(22{,}5°) = 0{,}86603 + 0{,}06545 - 0{,}00742 = 0{,}92405$ et donc $\cos(202{,}5°) = -\cos(22{,}5°) \approx -0{,}92405$. Notez que l'erreur n'est que de 0,12%.

Graphiquement :



9 octobre 2017

EXTRI455 – POLYTECH, UMons, Mons, septembre 2017.

Vérifier l'identité suivante :

$$\frac{\tan^3\alpha-\cot^3\alpha}{\tan^2\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}}=\tan\alpha-\cot\alpha$$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Transformons le premier membre de l'expression :

$$\frac{\tan^3\alpha-\cot^3\alpha}{\tan^2\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}}=\frac{(\tan\alpha-\cot\alpha)\left(\tan^2\alpha+\overbrace{\tan\alpha.\cot\alpha}^{=1}+\cot^2\alpha\right)}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}}$$

$$=(\tan\alpha-\cot\alpha)\frac{\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha}{\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha}$$

$$=(\tan\alpha-\cot\alpha)\frac{\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}+\overbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}^{=1}}{\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}+1}$$

$$=\tan\alpha-\cot\alpha$$

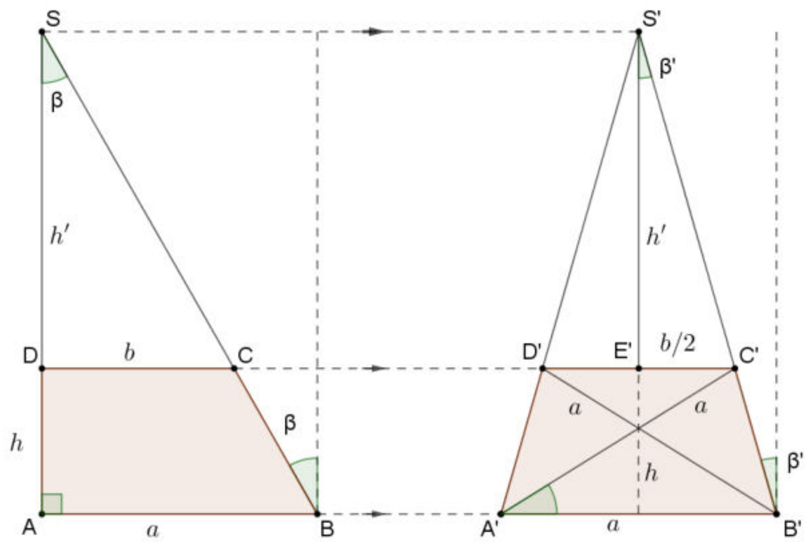
---

22 octobre 2017

EXTRI456 – POLYTECH, UMons, Mons, septembre 2017

Soit le trapèze $ABCD$ rectangle en A, de hauteur h. La grande base à une longueur $AB = a$ et la petite base une longueur $CD = b$. L'angle entre le côté oblique du trapèze et la hauteur est noté β. La grande base restant fixe, et la hauteur inchangée, on déplace ensuite la petite base parallèlement à la grande base, de telle sorte que le trapèze soit rendu isocèle.

Exprimer l'angle β en fonction du rapport $\dfrac{a}{h}$ (supérieur à 1) pour que les diagonales du trapèze isocèle ainsi obtenu soient de même longueur que la grande base.



L'examen des triangles rectangles SDC et $S'E'C'$ montre immédiatement que :

$$\tan\beta = 2\tan\beta' \Rightarrow \beta' = \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\beta\right) \qquad (1)$$

D'autre part dans le triangle isocèle $A'C'B'$, on a :

$$A' = 180° - 2(90° - \beta') = 2\beta'.$$

Or la hauteur de ce triangle est h, donc $\frac{h}{a} = \sin(2\beta')$. Et en tenant compte de (1)

$$\frac{h}{a} = \sin\left[2\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\beta\right)\right]$$

Transformons cette expression :

$$\Rightarrow \qquad \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\beta\right) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{h}{a}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\tan\beta = \tan\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{h}{a}\right) \Rightarrow \tan\beta = 2\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{h}{a}\right)$$

Cette expression peut être considérée comme la réponse. On va la transformer pour la rendre plus "jolie" en tenant compte des identités : $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ et $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

$$\Rightarrow \qquad \tan\beta = \frac{\frac{h}{a}}{1+\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}} = \frac{2h}{a+\sqrt{a^2-h^2}}$$

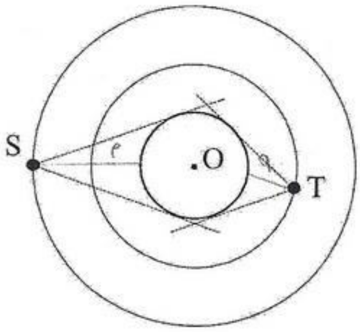
En posant $\alpha = \frac{a}{h}$, l'expression devient $\boxed{\tan\beta = \frac{2}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}} \text{ avec } \alpha > 1}$

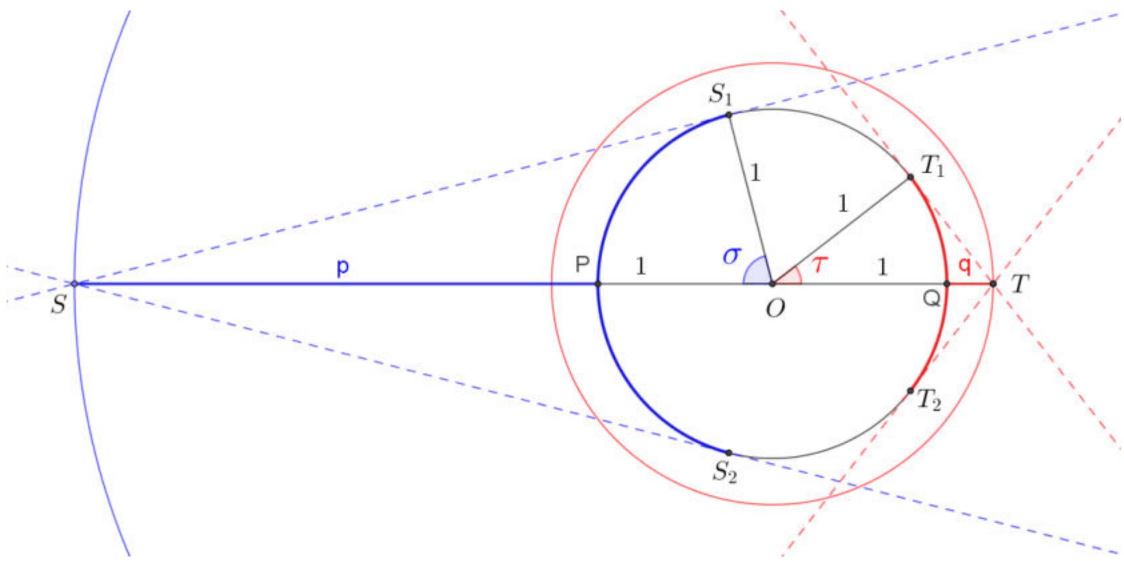
Exemple :

$a = 12$ cm, $h =$ 6.3396 cm, $\alpha = 1.89286$, $b = 8.3748$ cm, $\beta = 29.7374°$, $\beta' = 15.9454°$

EXTRI457 – POLYTECH, UMons, Mons, septembre 2017.

Soient deux satellites assimilés aux points S et T, en orbite circulaire dans le même plan autour d'une planète sphèrique de centre O et de rayon unitiare $r = 1$. Le premier satellite $(\text{point } S)$ se situe à un distance minimale p de la surface de la planète et le second $(\text{point } T)$ à une distance minimale q.
Exprimer la distance q en fonction de la distance p, de telle manière que dans la plan orbital commun, l'arc de cercle visible depuis le point S vaille le double de celui visible depuis le point T.





Voir figure pour la définition des points et des angles.

L'arc S_1PS_2 est le double de l'arc T_1QT_2 si l'angle $POS_1 = \sigma$ est le double de l'angle $QOT_1 = \tau$.

On a alors : $\begin{cases} \cos\sigma = \dfrac{1}{p+1} \Rightarrow \sigma = \arccos\dfrac{1}{p+1} \\ \cos\tau = \dfrac{1}{q+1} \Rightarrow \tau = \arccos\dfrac{1}{q+1} \end{cases}$, Or $\sigma = 2\tau \Rightarrow \arccos\dfrac{1}{p+1} = 2\arccos\dfrac{1}{q+1}$

On réarrange et on prend le cos des deux membres.

$$\arccos\frac{1}{p+1} - \arccos\frac{1}{q+1} = \arccos\frac{1}{q+1} \Rightarrow \cos\left(\arccos\frac{1}{p+1} - \arccos\frac{1}{q+1}\right) = \cos\left(\arccos\frac{1}{q+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p+1}.\frac{1}{q+1} + \sqrt{1-\frac{1}{(p+1)^2}}.\sqrt{1-\frac{1}{(q+1)^2}} = \frac{1}{q+1} \text{ car } \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

On multiplie les deux membres par $(p+1)(q+1)$ et on chasse le dénominateur.

$$\Rightarrow p+1 = 1+\sqrt{\left[(p+1)^2-1\right]\left[(q+1)^2-1\right]} \Rightarrow p = \sqrt{(p^2+2p)(q^2+2q)}$$

On élève au carré et ramène tout du même côté pour donner une équation en q.

$q^2 + 2q - \dfrac{p}{p+2} = 0$. On résoud cette équation et on en garde que la racine positive.

$$\Rightarrow q = -1 \pm \sqrt{1+\frac{p}{p+2}} \Rightarrow \boxed{q = \sqrt{\frac{2(p+1)}{p+2}} - 1}$$

Par exemple : $p = 3 \Rightarrow \sigma = 75.5225°$, $q = 0.2649$, $\tau = 37.7613°$

Rappel: Pour l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, si b est pair : $b = 2b'$, alors

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

EXTRI458 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2017.

A, B, C désignant les mesures des angles d'un triangle non dégénéré, montrer que si :

$$\tan B = \frac{\sin C}{1-\cos C}$$

alors le triangle est isocèle.

Nous reprenons la solution proposée par Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Vérifions tout d'abord les conditions d'existence :

1. $\operatorname{tg} B = \dfrac{\sin B}{\cos B}$ ce qui entraine que $\cos B \neq 0 \Rightarrow B \neq 90° + k180°$.
2. $1 - \cos C \neq 0 \Rightarrow C \neq 0° + k360°$ ce qui est toujours vérifié puisque le triangle est non-dégénéré. $\boxed{A}$

L'égalité peut être transformée successivement en utilisant la relation $2\sin a \cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b)$:

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin C}{1-\cos C} \Leftrightarrow \sin B - \sin B \cos C = \sin C \cos B \; \boxed{B}$$

$$\Leftrightarrow \sin B - \frac{1}{2}\sin(B-C) - \frac{1}{2}\sin(B+C) = \frac{1}{2}\sin(C-B) + \frac{1}{2}\sin(C+B)$$

Après simplification, l'égalité de départ devient $\sin B = \sin(B+C)$ $\boxed{C}$, qui est vérifiée pour :

1. $B = B + C \Rightarrow C = 0°$ qui est à rejeter puisque le triangle est non-dégénéré.
2. $B = \pi - (B+C) \Rightarrow 2B = \pi - C$, or $A + B + C = \pi$ ce qui donne finalement après substitution $2B = A + B \Rightarrow B = A$ et le triangle est isocèle (CQFD) $\boxed{D}$.

---

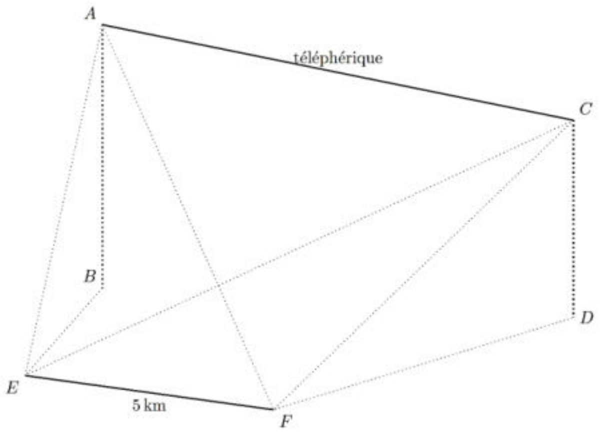
24 octobre 2017

EXTRI459 – FACSA, ULiège, Liège juillet 2017.

On désire relier les sommets A et C de deux colines par un téléphérique. Afin de déterminer l'ampleur des travaux, des mesures topographiques sont effectués à partir de deux points E et F distants de 5 km et situés dans un même plan horizontale. Les points B et D représentent les bases des sommets A et C dans le plan d'observation. Les angles $\widehat{AFE}, \widehat{AEF}$ et $\widehat{AEB}$ valent respectivement 12.3672°, 157.1063° et 5.8750° et les angles $\widehat{CFE}, \widehat{CEF}$ et $\widehat{CFD}$ valent respectivement 80.2493°, 68.9063° et 3.1996°.

a) Calculer la hauteur des deux collines par rapport au plan d'observation (segments AB et CD).

b) Calculer la distance entre les deux sommets (segment AC)



Nous reprenons la solution proposée par Prof. P. Dewallef et Prof. Q. Louveaux

Point a

L'application de la formule des sinus dans le triangle EAF donne :

$$\frac{\overline{AE}}{\sin \widehat{AFE}} = \frac{\overline{EF}}{\sin \widehat{EAF}}$$

où l'angle $\widehat{EAF} = 180° - \widehat{AFE} - \widehat{AEF} = 180° - 12.3672° - 157.1063° = 10.5265°$, ce qui donne :

$$\overline{AE} = \overline{EF}\frac{\sin \widehat{AFE}}{\sin \widehat{EAF}} = 5000\frac{\sin 12.3672}{\sin 10.5265} = 5861.73\,\mathrm{m}$$

La longueur du segment AB est alors aisément déterminée en notant que le triangle AEB est rectangle en B et il vient :

$$\sin \widehat{AEB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AE} \sin \widehat{AEB} = 5861.73 \sin 5.8750 = 600\,\mathrm{m}$$

De manière similaire en appliquant la formule des sinus dans le triangle ECF, on détermine :

$$\overline{CF} = \overline{EF} \frac{\sin \widehat{CEF}}{\sin \widehat{ECF}} = 5000 \frac{\sin 68.9063}{\sin 30.8444} = 9098.67\,\mathrm{m}$$

Et ensuite dans le triangle rectangle CFD :

$$\sin \widehat{CFD} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CF}} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{CF} \sin \widehat{CFD} = 9098.67 \sin 3.1996 = 507.8\,\mathrm{m}$$

Point b

Les points A, C, F et E n'étant pas sur un même plan, il n'est pas possible de déterminer $\overline{AC}$ directement en calculant la valeur de l'angle AFC par la différence de $\widehat{CFE}$ et $\widehat{AFE}$ et en résolvant le triangle AFE.
Par contre, les points A, B, C et D sont dans un même plan et il est possible d'exprimer :

$$\overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 + (\overline{AB} - \overline{CD})^2$$

La longueur du segment BD est déterminée en résolvant le quadrilatère plan $BDFE$.

Commençons par déterminer la longueur des segments BE et DF :

— $\overline{BE} = \overline{AE} \cos \widehat{AEB} = 5830.94\,\mathrm{m}$
— $\overline{DF} = \overline{CF} \cos \widehat{CFD} = 9084.49\,\mathrm{m}$

Les diagonales BF et DE sont calculées en résolvant respectivement les triangles rectangles ABF et CDE :

— $\overline{BF} = \sqrt{\overline{AF}^2 - \overline{AB}^2}$ où $\overline{AF}$ est déterminé en appliquant la formule des sinus dans le triangle AEF, soit $\overline{AF} = 10\,647\,\mathrm{m}$ et $\overline{BF} = 10\,630.08\,\mathrm{m}$.
— $\overline{DE} = \sqrt{\overline{EC}^2 - \overline{CD}^2}$ où $\overline{EC}$ est déterminé en appliquant la formule des sinus dans le triangle ECF, soit $\overline{EC} = 9611.25\,\mathrm{m}$ et $\overline{DE} = 9597.82\,\mathrm{m}$.

La réponse finale s'obtient en appliquant la formule d'Al-Kashi successivement dans les triangles BEF, DEF et BDE :

— $\overline{BF}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EF}^2 - 2\overline{BE}\,\overline{EF} \cos \widehat{BEF} \Rightarrow \widehat{BEF} = 157.8306°$.
— $\overline{DF}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EF}^2 - 2\overline{DE}\,\overline{EF} \cos \widehat{DEF} \Rightarrow \widehat{DEF} = 68.8748°$.
— $\overline{BD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{ED}^2 - 2\overline{BE}\,\overline{ED} \cos(\widehat{BEF} - \widehat{DEF}) \Rightarrow \overline{BD} = 11\,139\,\mathrm{m}$.

Et il vient :

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BD}^2 + (\overline{AB} - \overline{CD})^2} = 11\,139.4\,\mathrm{m}$$