Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 48

EXTRI480-EXTRI489

http://matheux.ovh/Accueil.html

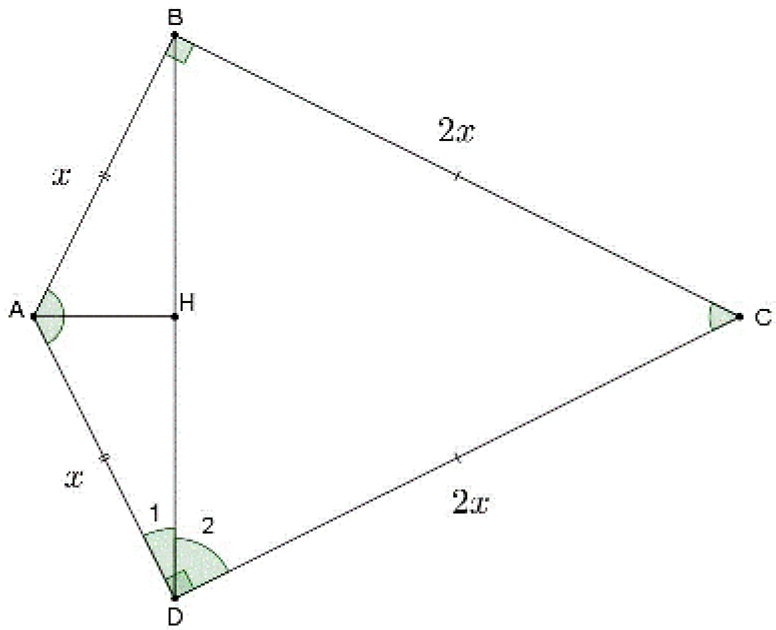
Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Septembre 2019

EXTRI480 – – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2019.

Soit un terrain à bâtir en forme de quadrilatère $ABCD$. Le géomètre mandaté pour relever les dimensions de ce terrain a consigné sur son plan que les deux côtés de l'angle au sommet A sont de même longueur, les deux côtés de l'angle C, opposé à l'angle A, sont eux aussi de même longueur valant le double de x.
On demande de calculer la valeur numérique de sin C si les angles B et D aux deux autres somet sont droits. Pour résoudre cette question, il est nécessaire de représenter graphiquement le terrain (l'utilisation d'un compas est recommandée)

Solution proposée par Yacin Zriwil



On a : $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360°$, or $\widehat{B}=\widehat{D}=90° \Rightarrow \widehat{A}+\widehat{C}=180° \Rightarrow \widehat{C}=180°-\widehat{A} \Rightarrow \sin\widehat{C}=\sin\widehat{A}$

Dans le triangle ABD, H est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur BD. H est aussi le milieu de BD car le triangle ABD est isocèle en $A \Rightarrow |DH| = x\cos\widehat{D_1} \Rightarrow |BD| = 2x\cos\widehat{D_1}$ (1).

Appliquons la relation des sinus : $\dfrac{\sin\widehat{A}}{|BD|}=\dfrac{\sin\widehat{D_1}}{x} \Rightarrow \sin\widehat{A}=\dfrac{|BD|\sin\widehat{D_1}}{x}$

Dans le triangle BCD, appliquons aussi la relation des sinus :

$$\frac{\sin\widehat{C}}{|BD|}=\frac{\sin\widehat{D_2}}{2x}=\frac{\sin\left(90°-\widehat{D_1}\right)}{2x}=\frac{\cos\widehat{D_1}}{2x} \Rightarrow \sin\widehat{C}=\frac{|BD|\cos\widehat{D_1}}{2x} \quad (2)$$

Or $\sin\widehat{C}=\sin\widehat{A} \Rightarrow \dfrac{|BD|\cos\widehat{D_1}}{2x}=\dfrac{|BD|\sin\widehat{D_1}}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\cos\widehat{D_1}=\sin\widehat{D_1}$ car $|BD|\neq 0$ et $x\neq 0$.

$\Rightarrow \tan\widehat{D_1}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos^2\widehat{D_1}=\dfrac{1}{\tan^2\widehat{D_1}+1}=\dfrac{1}{\frac{1}{4}+1}=\dfrac{4}{5}$

Mais en injectant (1) dans (2): $\sin\widehat{C}=\cos^2\widehat{D_1}=\dfrac{4}{5}$

Solution proposée par Réjane Delchambre

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow C=2\arctan\frac{1}{2} \Rightarrow \sin C=\sin 2\arctan\frac{1}{2}=2\sin\arctan\frac{1}{2}.\cos\arctan\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin C=2.\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}.\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$$

Rappel : $\sin\arctan\alpha=\dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, $\cos\arctan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

Le 07 novembre 2019. Modifié le 18 avril 2021 (Réjane Delchambre).

EXTRI481 – EPL, UCL, LLN, juillet 2019.
Polytech, Umons, Mons, juillet 2019.
FACSA, ULiège, Liège, juillet 2019.
EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2019.

Résoudre dans l'ensemble des réels l'équation.

$$4(\sin x+\cos x)-8\sin x\cos x=5$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Noter que bien que les solutions trouvées ne soient pas sous forme d'angles remarquables, il est possible de les représenter de façon précise sur le cercle trigonométrique.

Pour cette équation, il est suggéré de poser $y=\sin x+\cos x$

Solution proposée par Yacin Zriwil

$4(\sin x+\cos x)-8\sin x\cos x=5$

On pose : $y=\sin x+\cos x\Rightarrow y^2=1+2\sin x\cos x\Rightarrow 4(y^2-1)=8\sin x\cos x$

$\Rightarrow 4y-4y^2+4-5=0\Rightarrow 4y^2-4y+1=0\Rightarrow(2y-1)^2=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}$

On a donc : $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2k\pi$

Représentation sur le CT.

On a : $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$

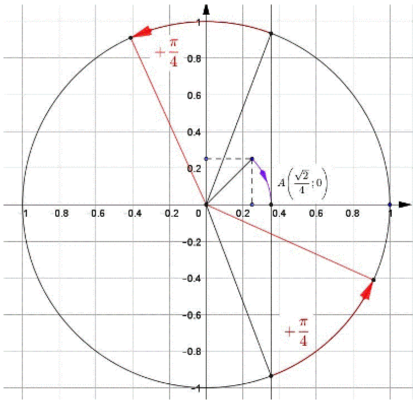
Comment construirre précisément $\frac{\sqrt{2}}{4}$? Il suffit de considérer un triangle rectangle isocèle dont la longueur des côtés de l'angle droit est $\frac{1}{4}$.

Par Pythagore, on a : $x^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Soit le point $A\left(\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$ dans le plan OXY et donc $\|\overrightarrow{OA}\|=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

La droite $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ coupe le CT en deux points qui déterminent des longueurs d'arc égale à $\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. Il reste à ajouter $\frac{\pi}{4}$ pour obtenir une représentation précise des solutions.

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi$$



Solution proposée par Nicole Berckmans et Martine Devillers

Méthode 1

On pose $y = \sin x + \cos x \Rightarrow y^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow 4y - 4(y^2 - 1) = 5 \Rightarrow 4y^2 + 4y + 1 = 0$

$\Rightarrow (2y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

On a alors : $\cos x + \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x + \tan\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi$

Méthode 2

L'équation est symétrique. On pose $x = y + \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow 4\left(\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\right) - 8\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = 5$

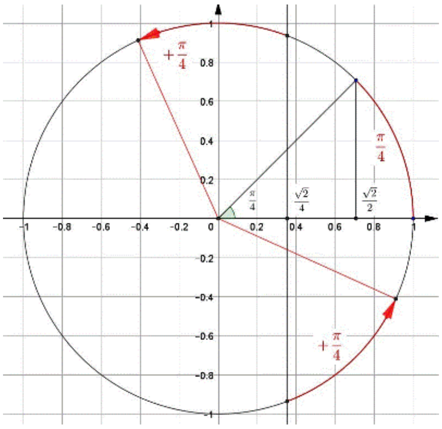
$\Rightarrow 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin y\right) - 4\sin\left(2y + \frac{\pi}{2}\right) = 5$

$\Rightarrow 4\sqrt{2}\cos y - 4\cos 2y = 5 \Rightarrow 4\sqrt{2}\cos y - 4\left(2\cos^2 y - 1\right) = 5$

$\Rightarrow 8\cos^2 y - 4\sqrt{2}\cos y + 1 = 0 \Rightarrow \left(2\sqrt{2}\cos y - 1\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow y = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi$

La construction est donnée ci-dessous.



Le 07 novembre 2019

EXTRI482 – EPL, UCL, LLN, juillet 2019.

Pour chaque sous-question donnez la solution dans la boite fournie. Seule la solution correcte sera évaluée, inutile de fournir votre raisonnement.

Réponse juste = 1 point ; autre réponse = 0.

a) Donnez toutes les solutions sur le cercle trigonométrique à l'équation suivante. Il y a entre 0 et 10 solutions. S'il y a plusieurs solutions donnez-les dans l'ordre croissant dans les boites ci-dessous.

$$\sin(\pi - 4x) = 1$$

b) Que vaut exactement le sinus de 105° (à partir des angles remarquables)

c) Soit un triangle quelconque de sommets A, B et C. L'angle $\widehat{BAC}$ mesure 45°. L'angle $\widehat{ABC}$ est obtus et mesure 105°. Le cercle circonscrit au triangle ABC a un rayon de 2 cm.

Que vaut précisément (sans faire d'arrondis) l'aire de ce triangle exprimée en cm^2.

Si vous n'avez pas réussi à répondre a la question précédente vous pouvez poser $y = \sin(105°)$.

d) Trois villes nommées A, B et C sont situées à équidistance lnune de lnautre. Un oiseau volant en ligne droite à 34 km/h de la ville A à la ville B met 1 heure pour rejoindre sa destination. Mais pour les voitures cnest plus compliqué, il n'y a pas de route directe entre la ville A et B. Il faut donc passer par le ville D qui est située à équidistance des villes A, B et C (donc au centre du triangle ABC).

Combien de temps (exprimé en minutes) mettra une voiture pour aller de la ville A à la ville B, sachant qu'elle roule à 80 km/h ?

Solution proposée par Nicole Berckmans et Martine Devillers.

1) $\sin(\pi - 4x) = \sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{8}$						

2) <u>1er réponse</u> :

$$\sin 105° = \sin(60° + 45°) = \sin 60° \cos 45° + \sin 45° \cos 60°$$
$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

<u>2ème réponse</u> :

$$\sin 105° = \sin(90 + 45°) = \cos(-15°) = \cos\frac{30°}{2}$$
$$= \sqrt{\frac{1 + \cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Solution proposée par François-Xavier Sojic

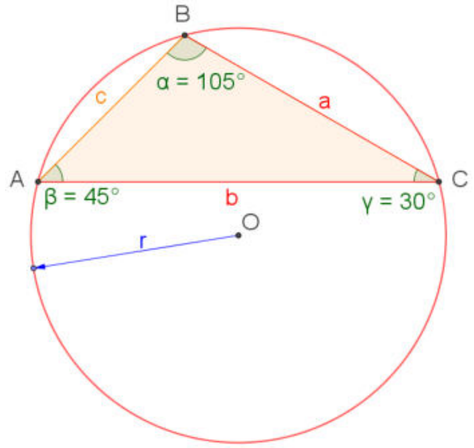
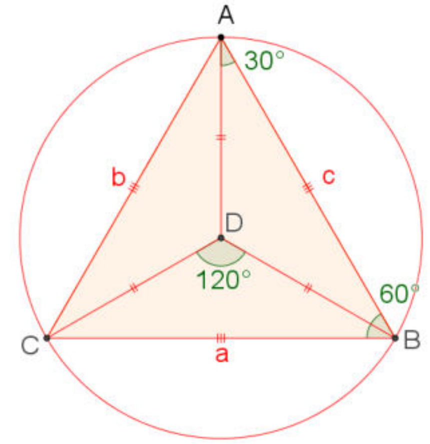
	

Figure 1	Figure 2

c) Figure 1

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2r=4\Rightarrow\begin{cases}c=4\sin\gamma=2\\ a=4\sin\alpha=2\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\mathscr{A}_{ABC}=\frac{a.c.\sin\beta}{2}=\frac{2\sqrt{2}\times2\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}=\sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

d) Figure 2

ABC est un triangle équilatéral de côté : $d=v.t=34$ km

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2r\Rightarrow r=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{34}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{34\sqrt{3}}{3}\text{ km}$$

Temps pour un trajet AB : $2\times\frac{\frac{34\sqrt{3}}{3}}{80}\times60=17\sqrt{3}$ min $\simeq$ 29.4 min

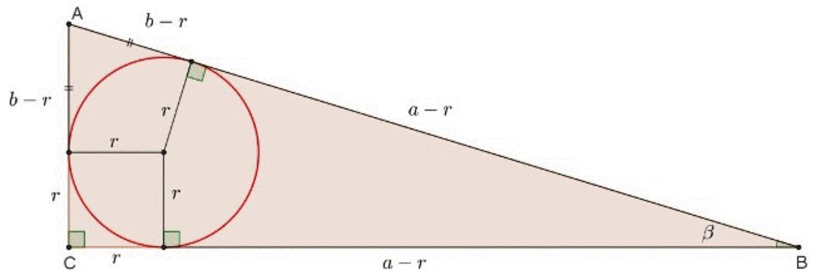
Le 12 novembre 2019. Modifié le 22 avril 2019 (François-Xavier Sojic)

EXTRI483 – EPL, UCL, LLN, juillet 2019.

Soit un triangle rectangle ABC rectangle en C.

1. Calculez une expression littérale qui donne le rayon r du cercle inscrit du triangle ABC, en fonction des longueurs a,b,c de ses 3 côtés.
2. Si l'angle B de ce triangle vaut $\beta = 17°$ et si le rayon r de son cercle inscrit vaut 8.3 cm, calculez a, b et c avec une précision d'un millimètre.

Solution proposée par Nicole Berckmans et Martine Devillers.



$$1)\ \text{On a} : c = (a-r)+(b-r) \Rightarrow r = \frac{a+b-c}{2}$$

$$2) \begin{cases} \sin 17° = \dfrac{b}{c} \\ \cos 17° = \dfrac{a}{c} \\ r = \dfrac{a+b-c}{2} = 8.3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = c\sin 17° \\ a = c\cos 17° \\ \dfrac{c\cos 17° + c\sin 17° - c}{2} = 8.3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = \frac{8.3 \times 2}{\sin 17° + \cos 17° - 1} = 66.8 \text{ cm} \Rightarrow \begin{cases} a = 63.8 \text{ cm} \\ b = 19.5 \text{ cm} \end{cases}$$

Le 12 novembre 2019

EXTRI484 – EPL, UCL, LLN, septembre 2019.
Polytech, Umons, Mons, septembre 2019.
FACSA, ULiège, Liège, septembre 2019.
EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2019.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ en spécifiant les conditions d'existence :

$$\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin x} = \cos x$$

et représenter les solutions dans $(-\pi, \pi)$ sur le cercle trigonométrique.

Solution proposée par Nicole Berckmans et Martine Devillers.

CE : $\sin x \neq 0$

Par Simpson : $\cos x - \cos 3x = \sin x \cos x$

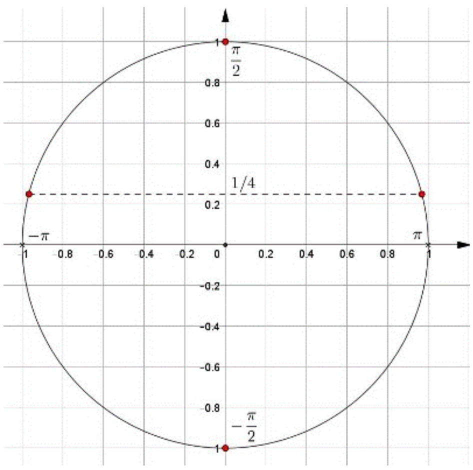
$\Rightarrow \quad 2\sin 2x \sin x = \cos x \sin x$

$\Rightarrow \quad 2\sin 2x = \cos x$

$\Rightarrow \quad 4\sin x \cos x = \cos x$

1) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{2}$

2) $\sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \arcsin\frac{1}{4} \\ x = \pi - \arcsin\frac{1}{4} \end{cases}$



Le 12 novembre 2019

EXTRI485 – EPL, UCL, LLN, septembre 2019.

Pour chaque sous-question donnez la solution dans la boit fournie. Seule la solution correcte sera évaluée, inutile de fournir votre raisonnement.
Réponse juste = 1 point; autre réponse = 0.

- Si $\tan x = a$ alors que vaut $(1+a^2).\sin^2 x$?

- Nous savons que $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$ que vaut x en degré sachant que x est entre 0 et 90°.

- Exprimez en cm^2 l'aire d'un triangle isocèle rectangle dont le côté opposé à l'angle droit est de longueur égale à 2 cm.

- Une route présentant une pente de 10% signifie que pour un déplacement horizontale de 100 m, on se déplace verticalement de 10 m. Quelle est la pente (exprimée en % et calculée à 2% près) d'une route inclinée de 15° par rapport à l'horizontale?
  Indice : $\sqrt{3} \approx 1.7$.

Solution proposée par Nicole Berckmans et Martine Devillers.

1) $(1+a^2)\sin^2 x = (1+a^2)\left(1-\frac{1}{1+a^2}\right) = a^2$ car $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\frac{1}{1+\tan^2 x}$

2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 30° + \sin 60°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 \times \sin 45° \cos °15°$

$= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 15° = \cos 15° = \sin(90°-15°) = \sin 75°$

3) Soit a la longueur des 2 côtés de l'angle droit : $a^2 + a^2 = 2^2 \Rightarrow a^2 = 2$

Aire : $A = \frac{1}{2} a.a = 1$

4) • $\tan 15° = \tan(45°-30°) = \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1+\tan 45° \tan 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} \simeq 0.3$

• $\tan 15° = \tan(60°-45°) = \frac{\tan 60° - \tan 45°}{1+\tan 60° \tan 45°} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3} \simeq 0.3$

Le 12 novembre 2019

EXTRI486 – EPL, UCL, LLN, septembre 2019.

Soit un haxagone régulier H_0 de côté a. On propose de construire l'hexagone régulier H_1 de la façon suivante : les 6 sommets de H_1 sont les milieux des arêtes de H_0 et les 6 arêtes de H_1 relient les milieux des arêtes communes aux sommets de H_0. On peut ensuite construire une suite d'hexagones réguliers $H_2, H_3, ..., H_n$ où H_{j+1} est construit à partir de H_1 en utilisant la même procédure. Soit R_i le rayon du cercle inscrit à H_i et A_i l'aire de H_i.

1) Faites un dessin propre et précis de H_0, de H_1 et de H_2. Vous pouvez vous servir de ce dessin pour répondre aux sous-questions 2) et 3).
2) Trouvez le plus petit n possible qui vérifie $3R_n < R_0$.
3) TRouvez le plus petit n possible qui vérifie $3A_n < A_0$

Solution proposée par Nicole Berckmans et Martine Devillers.

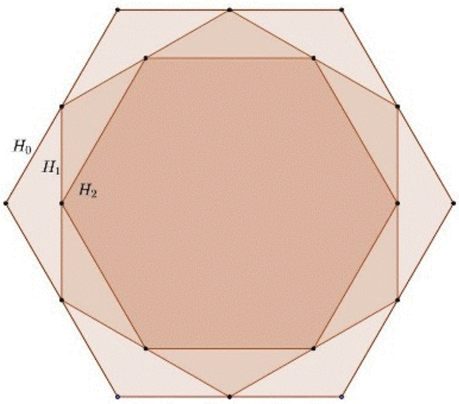


Figure 1

2) Figure 2 : $\tan 60° = \sqrt{3} = \dfrac{R_0}{a/2} \Rightarrow R_0 = a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Figure 3 : $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R_1}{R_0} \Rightarrow R_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} R_0 = a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

Or $3R_n < R_0 \Rightarrow 3a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} < a\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n < \dfrac{1}{3} \Rightarrow \boxed{n=8}$

3) $A_1 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 A_0 \Rightarrow A_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} A_0$

Or $3A_n = 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} A_0 < A_0 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2n} < \dfrac{1}{3} \Rightarrow \boxed{n=4}$

Le 12 novembre 2019

EXTRI487 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2019.

Calculer, en justifiant chaque étape,

$$\sin\left(\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{4}\right)$$

Pour rappel, arctan désigne la fonction arc tangente.

Démontrons d'abord les formules : $\sin\arctan\alpha=\dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ et $\cos\arctan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

$$\sin\arctan\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\arctan\alpha}}=\frac{\tan\arctan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\arctan\alpha}}=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$\cos\arctan\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\arctan\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

Appliquons ces formules :

$$\sin\left(\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{4}\right)=\sin\arctan\frac{1}{3}\cos\arctan\frac{1}{4}+\cos\arctan\frac{1}{3}.\sin\arctan\frac{1}{4}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}.\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{16}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}}.\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1+\frac{1}{16}}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{10\times17}}{3\times4}}=\boxed{\frac{7}{\sqrt{170}}}$$

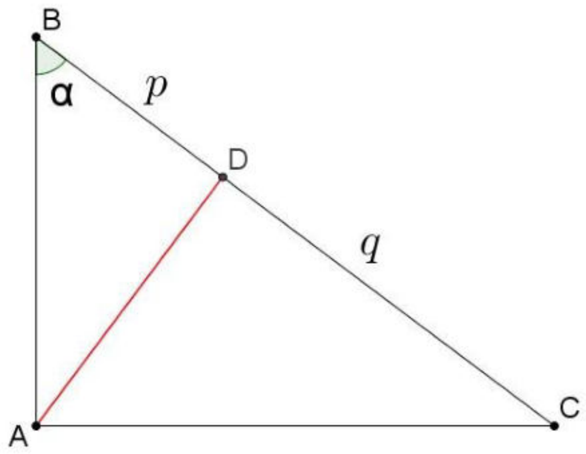
---

22 novembre 2019

EXTRI488 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2019.

Soit un triangle ABC, rectangle en A, et soit D le point d'intersection de la droite BC avec la hauteur issue de A. On pose $p = \|\overrightarrow{BD}\|$, $q = \|\overrightarrow{CD}\|$ et $\alpha = ABC$. Montrer que

$$\sin^2 \alpha = \frac{q}{p+q}$$



Triangle BDA : $\overline{AB} = \dfrac{p}{\cos\alpha}$

Triangle ABC : $\overline{AB} = (p+q).\cos\alpha$

On en déduit : $\dfrac{p}{\cos\alpha} = (p+q).\cos\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{p}{p+q}$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{p}{p+q} \Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha = \dfrac{q}{p+q}}$

---

22 novembre 2019

EXTRI489 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2019.

Sachant que

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}$$

Calculer $\sin\frac{\pi}{10}$

Méthode 1

Démontrons d'abord la formule : $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \left(1-2\sin^2\alpha\right)\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha\\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.\end{aligned}$$

Appliquons la formule en posant $\alpha=\frac{\pi}{10}$

$$\sin\alpha.\sin 3\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 3\sin^2\alpha - 4\sin^4\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 16\sin^4\alpha - 12\sin^2 + 1 = 0$$

Cette équation bicarrée a pour solutions $\sin^2\alpha = \frac{6\pm 2\sqrt{5}}{16} = \frac{5\pm 2\sqrt{5}+1}{16} = \frac{\left(\sqrt{5}\pm 1\right)^2}{16}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}\pm 1}{4}$. Les racines négatives sont éliminées car $\sin\frac{\pi}{10}>0$.

Il reste $\frac{\sqrt{5}+1}{4}\simeq 0.81$ qui doit aussi être éliminée car $\sin\frac{\pi}{10}<\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0.71$.

Il reste finalement : $\boxed{\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

Méthode 2

Appliquons Simpson inverse :

$$\sin\frac{\pi}{10}.\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{10}-\cos\frac{2\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\Rightarrow -2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{\pi}{5}-1=0$$

$$\Rightarrow \qquad -2\left(2\cos^2\frac{\pi}{5}-1\right)+2\cos\frac{\pi}{5}-1=0\Rightarrow 4\cos^2\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}-1=0$$

$\Rightarrow \qquad \cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (on garde seulement la racine positive).

Dès lors, il reste à appliquer la formule $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

$$\Rightarrow \qquad \sin\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}}{4}=\boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

Méthode 3

Sachant que $\frac{3\pi}{10}$ et $\frac{2\pi}{10}$ sont complémentaires, l'expression devient :

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin\frac{\pi}{10}\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}$$

Posons $y=\sin\frac{\pi}{10}$, on obtient l'équation : $8y^3-4y+1=0$ qui a pour solution $y=\frac{1}{2}$

Horner : $\begin{array}{c|ccc|c} & 8 & 0 & -4 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & & 4 & 2 & -1 \\ \hline & 8 & 4 & -2 & \end{array}$. Il reste à résoudre : $4y^2+2y-1=0\Rightarrow \boxed{y=\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$

---

22 novembre 2019. Modifié le 3 mai 2021.