Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 50

EXTRI500-EXTRI509

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Jan Frans Broeckx – Nicole Berckmans
Fabienne Zoetard

Mars 2020

EXTRI500 - Polytech, UMons, Mons, juillet 2020.
EPL, UCL, LLN, juillet 2020.
EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2020.
FACSA, ULiège, Liège, juillet 2020.
Mode restreint.

Trouvez toutes les solutions de l'équation trigonométrique suivante.

$$3(\sin(x)+\cos(x))-4(\sin^3(x)+\cos^3(x))=0$$

Tracer les solutions de l'équation sur le cercle trigonométrique.

Solution proposée par Emilie Jacqmin.
Solution similaire proposée par Nicole Berckmans.

a)

$$3.(\sin x+\cos x)-4.(\sin^3 x+\cos^3 x)=0$$

$$\Leftrightarrow 3.(\sin x+\cos x)-4.(\sin x+\cos x).(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=0 \quad \text{ou} \quad 3-4.(1-\sin x.\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x=-\cos x \quad \text{ou} \quad -1+4\sin x.\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k\pi \quad \text{ou} \quad -1+2\sin 2x=0$$

$$\sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \quad \text{ou} \quad 2x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$$

$$x=\frac{\pi}{12}+k\pi \quad \text{ou} \quad x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$$

Finalement, $S=\left\{\frac{\pi}{12}+k.\frac{\pi}{3};k\in Z\right\}$

b)

Solution proposée par Jacques Collot

En notant que $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ et $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, l'équation devient

$\sin 3x - \cos 3x = 0 \Rightarrow \tan 3x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}$.

Notons aussi que l'on peut pousser l'équation encore un peu plus loin :

$$\sin 3x - \cos 3x = 0 \Rightarrow \sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0 \Rightarrow 2\cos\frac{\pi}{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Solutions proposées par l'université.

3) La plus algébrique. On pose $S = \cos x + \sin x$ et $P = \cos x \sin x$. Sachant que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on a $S^2 = 1 + 2P$. On écrit l'équation comme

$$3S - 4(S^3 - 3PS) \quad \rightarrow \quad S(2S^2 - 3) = 0$$

ce qui permet de trouver

$$S = 0 \ , \ S = \sqrt{3/2} \quad \text{et} \quad S = -\sqrt{3/2}.$$

4) Utiliser la symétrie. On pose $x = y + \pi/4$ et après calcul, on trouve une éqution en y

$$\boxed{\sqrt{2}\cos(y)\left(4\cos^2(y) - 3\right) = 0.}$$

On trouve donc

$$\cos(y) = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}}$$

$$\cos(y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad y = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \begin{cases} \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{12} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

$$\cos(y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad y = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \begin{cases} \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

5) Transformer l'équation en équation homogène :

$$3\left(\sin(x) + \cos(x)\right)\underbrace{\left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right)}_{=1} - 4\left(\sin^3(x) + \cos^3(x)\right) = 0$$

qui est homogène. On divise par $\cos^3 x$ (attention à vérifier que $\cos(x) = 0$ n'est pas solution !) :

$$-\tan^3(x) + 3\tan^2(x) + 3\tan(x) - 1 = 0$$

dont les solutions sont $\tan(x) = -1$, $\tan(x) = 2 \pm \sqrt{3}$.

Le 1 septembre 2020

EXTRI501 – EPL, UCL, LLN, juillet 2020.
Mode restreint.

On considère le triangle ABC dont les dimensions sont entièrement déterminées par $\hat{A}$, l'angle en A, ainsi que par $c = |\overline{AB}|$ et $b = |\overline{AC}|$ les longueurs des deux côtés issus de A. On considère ensuite le cercle inscrit au triangle ABC avec son centre O. On considère finalement le point D à l'intersection des droites AO et BC.

a) Faites un dessin clair qui contient tous les éléments du problème.

b) Calculez l'aire du triangle ABC en fonction de $\hat{A}$, b et c.

c) Calculez la longueur $x = |\overline{AD}|$ du segment $\overline{AD}$ en fonction des données $\hat{A}$, b et c.

d) Calculez le rayon r du cercle inscrit à ABC en fonc des données $\hat{A}$, b et c..

Solution proposée par Emilie Jacqmin:
Solution similaire proposée par Nicole Berckmans

a)

b) $\boxed{\text{Aire} = \frac{1}{2}.b.c.\sin \hat{A}}$

c) aire ABC = aire ABD + aire ADC

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.b.c.\sin \hat{A} = \frac{1}{2}.c.x.\sin B\hat{A}D + \frac{1}{2}.b.x.\sin D\hat{A}C$$

$$\Leftrightarrow b.c.\sin \hat{A} = c.x.\sin \frac{\hat{A}}{2} + b.x.\sin \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\Leftrightarrow b.c.\sin \hat{A} = x.\sin \frac{\hat{A}}{2}.(b+c)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{b.c.\sin \hat{A}}{(b+c).\sin \frac{\hat{A}}{2}}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow x = \frac{2.b.c.\cos \frac{\hat{A}}{2}}{b+c}}$$

2.d) aire ABC = aire AOB + aire BOC + aire AOC

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.b.c.\sin \hat{A} = \frac{1}{2}.c.r + \frac{1}{2}.\overline{BC}.r. + \frac{1}{2}.b.r$$

$$\Leftrightarrow b.c.\sin \hat{A} = r.\left(b + c + \sqrt{b^2 + c^2 - 2b.c.\cos \hat{A}}\right)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow r = \frac{b.c.\sin \hat{A}}{b + c + \sqrt{b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}}}}$$

EXTRI502 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2020.

Soit un triangle isocèle ABC dont les côtés AB et BC sont tous deux de longueur a.

Notons α l'amplitude de l'angle BAC.

a) Représenter schématiquement le triangle et toutes les grandeurs mentionnées ci-dessus.

b) Exprimer l'aire du triangle, notée S, en fonction de a et α.

c) Sachant que $a = 3$ m et $\sin \alpha = 1/3$, évaluer S.

d) Dans le même cas, donner la valeur numérique de S évaluée au centimètre carré près.

Indication : $\sqrt{2} = 1.41421356...$

e) Dans le même cas toujours, vérifier la plausibilité de ce résultat numérique à l'aide d'un graphique précis et à l'échelle.

---

a) $S = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$

b) $S = \frac{1}{2} . 3^2 . \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$ m^2

c) $S = 15000$ cm^2

d) Voir graphique

Note : On peut se demander si un exercice aussi facile à sa place ici où alors il manque quelque chose dans l'énoncé.

Le 12 novembre 2019

EXTRI503 – - Polytech, UMons, Mons, septembre 2020.
EPL, UCL, LLN, septembre 2020.
EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2020.
FACSA, ULiège, Liège, septembre 2020.
Mode restreint.

Trouvez toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation trigonométrique suivante :

$$\tan^2 x - 3\frac{\tan x}{\cos x} - \frac{1}{\cos^2 x} = 1$$

Solution proposée par Benoit Baudelet

La condition d'existence est $x \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a successivement

$$\begin{aligned}
\tan^2 x - 3\frac{\tan x}{\cos x} - \frac{1}{\cos^2 x} &= 1 \\
\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3\frac{\tan x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \\
\sin^2 x - 3\sin x - 1 &= \cos^2 x \\
\sin^2 x - 3\sin x - 1 &= 1 - \sin^2 x \\
2\sin^2 x - 3\sin x - 2 &= 0
\end{aligned}$$

En posant $T = \sin x$, cette dernière équation devient $2T^2 - 3T - 2 = 0$ dont les solutions sont $T_1 = 2$ ou $T_2 = \frac{-1}{2}$.

En revenant à la variable initiale, on a

- $\sin x = 2$, ce qui est impossible.
- $\sin x = \frac{-1}{2}$ donc les solutions sont $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Le 23 septembre 2020

EXTRI504 – EPL, UCL, LLN, septembre 2020.
Mode restreint.

.

On considère l'hexagone $ABCDEF$. On donne $|\overline{AB}| = 5, |\overline{BC}| = 3, |\overline{CD}| = 6$ et $|\overline{DE}| = 7$.

On suppose en outre que tous les angles internes de cet hexagone sont égaux:

$$A = B = C = D = E = F.$$

Le but de cet exercice est de calculer $x = |\overline{FA}|$ et $y = |\overline{EF}|$.

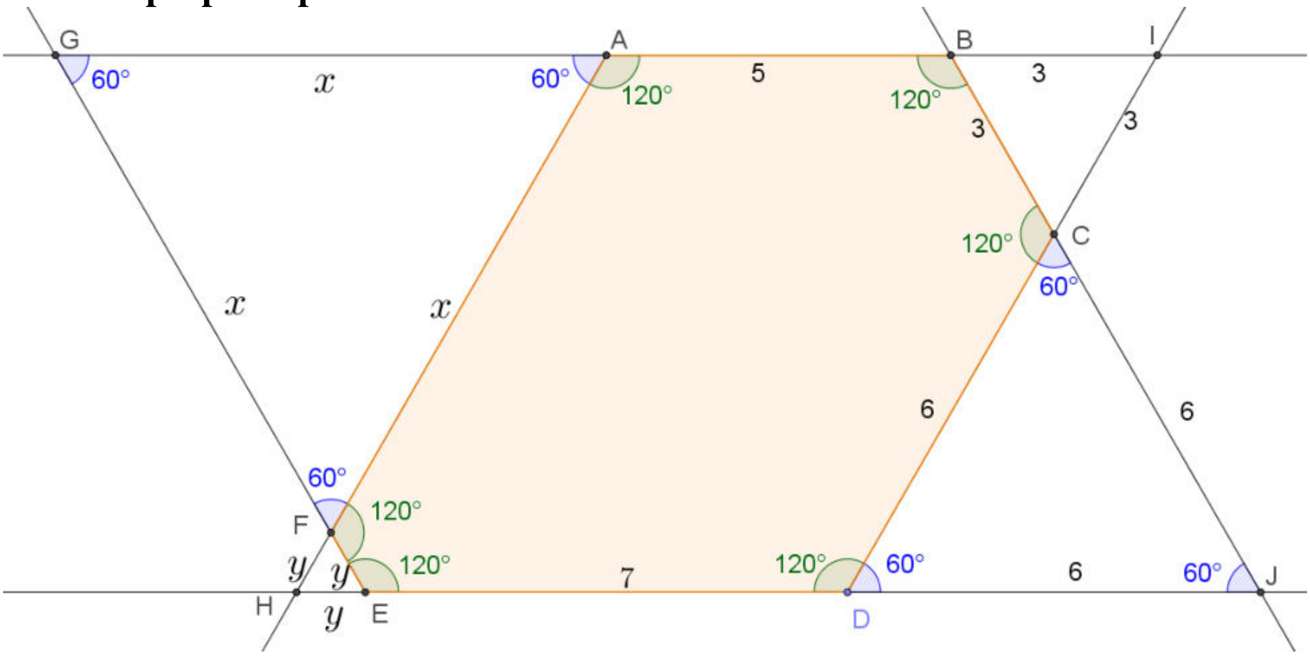
La solution la plus simple consiste à dessiner à l'extérieur de l'hexagone.

a) Faites un dessin clair qui contient tous les éléments du problème.

b) Calculer $\widehat{A}$.

c) Calculer les longueurs $x = |\overline{FA}|$ et $y = |\overline{EF}|$.

Solution proposée par marc Decoux



Puisque les 6 angles sont tous égaux, ils valent chacun 120°. $\Rightarrow A = 120°$

Le dessin fait apparaître une série de triangles équilatéraux et de parallèlogrammes.

On voit immédiatement dans le parallèlogramme $AIDH$: .

$$\begin{cases} |\overline{HF}| + |\overline{FA}| = |\overline{DC}| + |\overline{CI}| \\ |\overline{HE}| + |\overline{ED}| = |\overline{AB}| + |\overline{BI}| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = 6 + 3 = 9 \\ y + 7 = 5 + 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}}$$

Le 21 septembre 2020

EXTRI505 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2020.
Mode retreint

Soit un quadrilatère $ABCD$ tel que les longueurs des côtés AB et AD sont égales et notées a, les longueurs des côtés BC et CD sont égales et notées b, les angles ABC et ADC sont droits, et l'angle BAD est aigu et noté θ . Notons c et d les longueurs des segments $[BD]$ et $[AC]$, respectivement.

a) Représenter schématiquement le quadrilatère et toutes les grandeurs mentionnées ci-dessus.

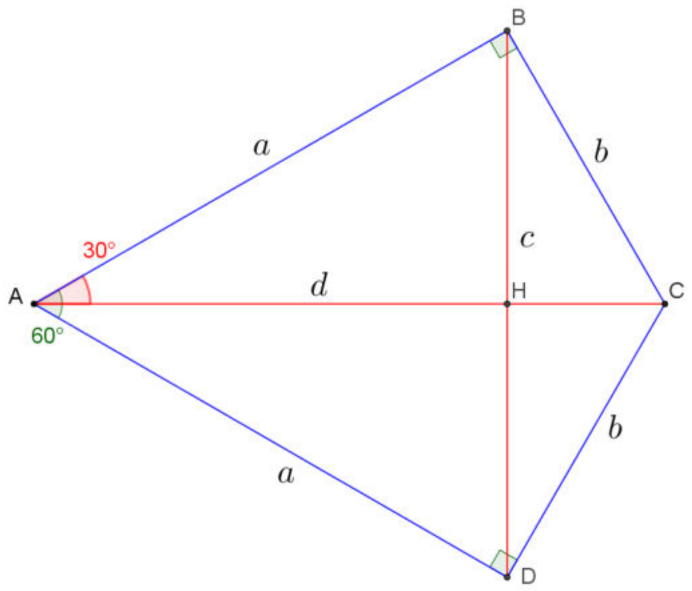
b) Sur base du schéma précédent, montrer que $\sin\theta = c / d$.

c) Exprimer le périmètre du quadrilatère, noté P, en fonction de b et θ.

d) Sachant que $b = 1$ m et $\theta = \pi / 3$, évaluer P.

e) Dans le même cas, donner la valeur numérique de P évaluée au centimètre près.
Indication : $\sqrt{3} = 1;7320508$ ...

f) Dans le même cas toujours, vérifier la plausibilité de ce résultat numérique à l'aide d'un graphique précis à l'échelle.



b) $\begin{cases} \sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{c/2}{a} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{a}{d} \end{cases} \Rightarrow \sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{c}{2d} \Rightarrow \boxed{\sin\theta = \dfrac{c}{d}}$

c) $\begin{cases} \sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{c/2}{a} \\ \sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{b}{d} \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{cd}{2b} = \dfrac{d^2\sin\theta}{2b}$ or $d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \left(a^2+b^2\right)\dfrac{\sin\theta}{2b}$

On obtient donc une équation du second degré en a :

$$\frac{\sin\theta}{2b}a^2 - a + \frac{b}{2}\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta.a^2 - 2ba + b^2\sin\theta = 0$$

$$a = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - b^2\sin^2\theta}}{\sin\theta} = b\frac{1\pm\cos\theta}{\sin\theta}$$

On sait que θ est un angle aigu, donc $\dfrac{\theta}{2} < 45°$ donc que $\tan\dfrac{\theta}{2} < 1$.

Et si on regarde le triangle rectangle ABC, cela implique que $a > b$.

mais $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1-\left(1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}} = \tan\dfrac{\theta}{2} < 1 \Rightarrow a < b$. C'est une contradiction

et nous devons rejeter la solution $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$. Par contre, $\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ est bien >1.

Le périmètre est par conséquent : $\boxed{P = 2(a+b) = 2b\left(1+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)}$

d) Pour $b = 1$ m et $\theta = \pi/3 \Rightarrow \boxed{P = 2\left(1+\sqrt{3}\right) \simeq 5.46 \text{ m}}$

Le 30 janvier 2021

EXTRI506 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2020.

A un instant initial, deux observateurs A et B distants de 2700 m voient un avion situé dans le plan vertical de la base d'observation sous des angles $C_1AO_1 = 35°$ et $C_1BO_1 = 64°$, l'avion se situant entre A et B. Après quelques secondes, ils font une seconde observation sous des angles $\overline{C_2AO_2} = 30.5°$ et $\overline{C_2BO_2} = 80°$, l'avion se situant à la droite de B.
Déterminez l'angle de montée de l'avion par rapport au segment AB, c'est-à-dire déterminez l'angle formé par la droite C_1C_2 et la droite AB.

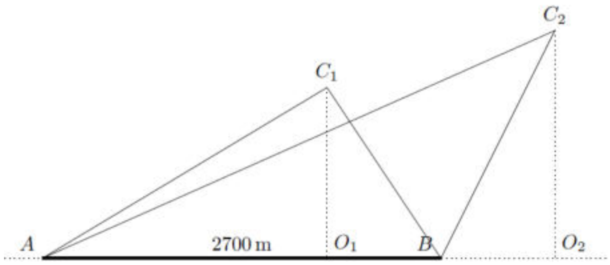


FIGURE 1 – Points d'observation

Nous reprenons la solution proposée par l'université

Solution

Dans le triangle ABC_1, $\widehat{C_1AB} + \widehat{C_1BA} + \widehat{AC_1B} = 180° \rightarrow \widehat{AC_1B} = 180° - 35° - 64° = 81°$. Toujours dans ce triangle, l'application de la formule des sinus donne :

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \widehat{AC_1B}} = \frac{\overline{AC_1}}{\sin \widehat{C_1BA}} \rightarrow \overline{AC_1} = \frac{\sin 64°}{\sin 81°} \times 2700 = 2457\text{m}.$$

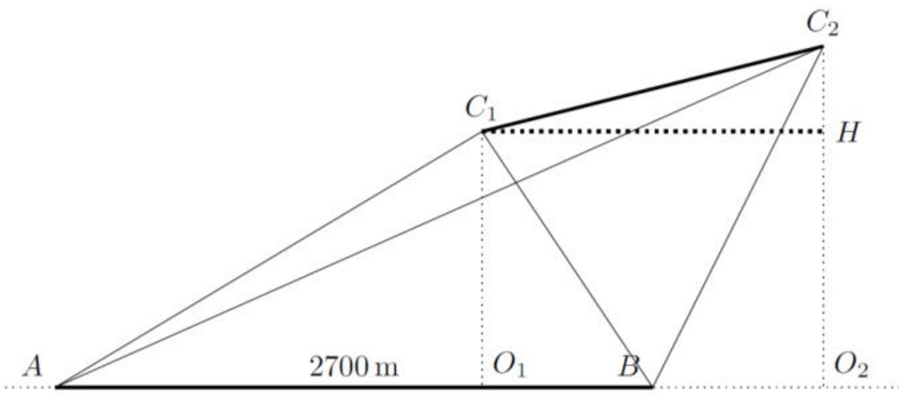
Dans le triangle rectangle C_1O_1A, il vient :

$$\sin \widehat{C_1AO_1} = \frac{\overline{O_1C_1}}{\overline{AC_1}} \rightarrow \overline{O_1C_1} = 1409\text{m}$$

et

$$\cos \widehat{C_1AO_1} = \frac{\overline{AO_1}}{\overline{AC_1}} \rightarrow \overline{AO_1} = 2013\text{m}$$

De manière similaire, dans le triangle ABC_2, on trouve $\overline{AC_2} = 3497\text{m}$ et dans le triangle AO_2C_2, $\overline{C_2O_2} = 1775\text{m}$ et $\overline{AO_2} = 3013\text{m}$.
Traçons la parallèle à O_1O_2 passant par C_1 pour former le triangle rectangle C_1HC_2 dans lequel l'angle $\widehat{C_2C_1H}$ est l'angle recherché :



$$\operatorname{tg}\widehat{C_1C_2H} = \frac{\overline{C_2H}}{\overline{C_1H}} = \frac{\overline{C_2O_2} - \overline{C_1O_1}}{\overline{AO_2} - \overline{AO_1}} \;\rightarrow\; \widehat{C_1C_2H} = 20°.$$

Alternativement, il est possible de déterminer la longueur des côtés BC_1 et BC_2 en appliquant la formule des sinus respectivement dans les triangles ABC_1 et ABC_2 :

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\widehat{AC_1B}} = \frac{\overline{BC_1}}{\sin\widehat{C_1AB}} \;\rightarrow\; \overline{BC_1} = \frac{\sin 35°}{\sin 81°} \times 2700 = 1568\text{m}.$$

et

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\widehat{AC_2B}} = \frac{\overline{BC_2}}{\sin\widehat{C_2AB}} \;\rightarrow\; \overline{BC_2} = \frac{\sin 30.5°}{\sin 49.5°} \times 2700 = 1802\text{m}.$$

En appliquant Al-Kashi dans le triangle BC_1C_2, on obtient alors la longueur du segment C_1C_2 :

$$\begin{aligned}\overline{C_1C_2} &= \sqrt{\overline{BC_1}^2 + \overline{BC_2}^2 - 2\overline{BC_1} \times \overline{BC_2} \times \cos\widehat{C_1BC_2}} \\ &= \sqrt{1568^2 + 1802^2 - 2 \times 1568 \times 1802 \times \ \cos(180° - 64° - 80°)} \\ &= 1065\text{m}\end{aligned}$$

Toujours dans le triangle BC_1C_2, la formule des sinus donne :

$$\frac{\overline{C_1C_2}}{\sin\widehat{C_1BC_2}} = \frac{\overline{BC_2}}{\sin\widehat{C_2C_1B}} \;\rightarrow\; \widehat{C_2C_1B} = \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_1C_2}} \sin\widehat{C_1BC_2} = 84°.$$

Puisque les angles $\widehat{HC_1B}$ et $\widehat{C_1BO_1}$ sont égaux (angles alterne-interne), L'angle recherché est donné par $\widehat{C_2C_1H} = \widehat{C_2C_1B} - \widehat{C_1BO_1} = 84° - 64° = 20°$.

Le 30 janvier 2021

EXTRI507 – ERM, Bruxelles, 2020.

Une forêt a la forme d'un triangle ΔABC telle que $AB = 2AC$ et dont langle de sommet BAC mesure 120°. Un chemin rectiligne AM traverse la forêt selon la bissectrice de l'angle BAC. Ce chemin a une longueur égale à 1 kilomètre.

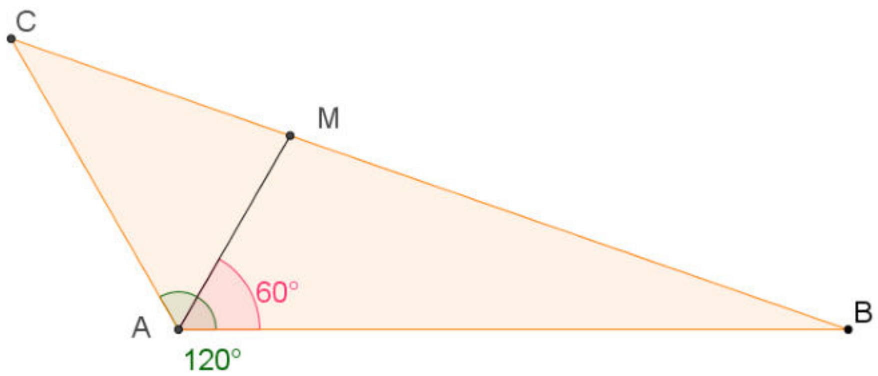
(a) Démontrer en utilisant la loi des sinus que $BM = 2CM$.

(b) Exprimer en utilisant la loi des cosinus BM et CM en fonction de BC.

(c) Calculer la longueur de BC.

(d) A l'aide des résultats précédents, trouver la longueur de AC.

Solution proposée par Benoit Baudelet



(a) $\Delta ABM : \dfrac{\sin AMB}{AB} = \dfrac{\sin 60°}{BM} \Rightarrow BM = AB\dfrac{\sin 60°}{\sin AMB} = 2BC\dfrac{\sin 60°}{\sin AMB}$

$\Delta BCM : \dfrac{\sin BCM}{BC} = \dfrac{\sin 60°}{CM} \Rightarrow CM = BC\dfrac{\sin 60°}{\sin BCM} = BC\dfrac{\sin 60°}{\sin\left(180° - AMB\right)} = BC\dfrac{\sin 60°}{\sin AMB}$

On en déduit que : $BM = 2CM$

(b) $\Delta ABM : BM^2 + 1 + AB^2 - 2AB\cos 60° = 1 + 4AC^2 - AC$

$\Delta BCM : CM^2 = 1 + AC^2 - 2AC\cos 60° = 1 + AC^2 - AC$

(c) ΔABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120° = AC^2 + 4AC^2 + 2AC^2 = 7AC^2 = 7\frac{9}{4} \Rightarrow BC = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

(d) De (a) et (b): $BM^2 + 4AC^2 - 2AC = 4CM^2 = 4 + 4AC^2 - 4AC \Rightarrow AC = \dfrac{3}{2}$

Le 1 mars 2020

EXTRI508 – ERM, Bruxelles, 2013.

Les racines (zéros) du polynôme $x^2 + px + q$ sont $\tan\alpha$ et $\tan\beta$.
Calculer l'expression V ci-dessous en fonction de p et q.

$$V = \sin^2(\alpha+\beta) + p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + q\cos^2(\alpha+\beta)$$

On déduit immédiatement que $\begin{cases} \tan\alpha + \tan\beta = -p \\ \tan\alpha.\tan\beta = q \end{cases}$

Par conséquent : $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta} = \dfrac{p}{q-1}$

Eprimons les différents termes de l'expression

- $\sin^2(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{2}\left[1-\cos(2(\alpha+\beta))\right] = \dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1-\tan^2(\alpha+\beta)}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}\right]$

$$= \frac{1}{2}\frac{1+\tan^2(\alpha+\beta)-1+\tan^2(\alpha+\beta)}{1+\tan^2(\alpha+\beta)} = \frac{\tan^2(\alpha+\beta)}{1+\tan^2(\alpha+\beta)} = \frac{\left(\dfrac{p}{q-1}\right)^2}{1+\left(\dfrac{p}{q-1}\right)^2}$$

$$= \frac{p^2}{(q-1)^2+p^2}$$

- $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{2}\sin\left[2(\alpha+\beta)\right] = \dfrac{1}{2}\dfrac{2\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan^2(\alpha+\beta)} = \dfrac{\dfrac{p}{q-1}}{1+\left(\dfrac{p}{q-1}\right)^2}$

$$= \frac{p(q-1)}{(q-1)^2+p^2}$$

- $\cos^2(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{2}\left[1+\cos(2(\alpha+\beta))\right] = \dfrac{1}{2}\left[1+\dfrac{1-\tan^2(\alpha+\beta)}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}\right] = \dfrac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}$

$$= \frac{1}{1+\left(\dfrac{p}{q-1}\right)^2} = \frac{(q-1)^2}{(q-1)^2+p^2}$$

On remplace : $V = \dfrac{p^2+p^2(q-1)+q(q-1)^2}{(q-1)^2+p^2} = \dfrac{p^2q+q(q-1)^2}{(q-1)^2+p^2} = q$

Le 1 mars 2020

EXTRI509 – ERM, Bruxelles, 2012.

Dans le triangle ABC, on a $a=\frac{7}{3}c$ et $b=\frac{8}{3}c$, où $a=|BC|, b=|AC|$ et $c=|AB|$.

Prouvez que : $\dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}=-\frac{1}{3}$ et que $\dfrac{\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{2}$, et déterminer la valeur de l'angle A.

Multiplions l'expression par $-2\sin\frac{A+B}{2}$ au numérateur et au dénominateur et appliquons Simpson et Carnot :

$$\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{-2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}}{-2\sin^2\frac{A+B}{2}}=\frac{\cos A-\cos B}{\cos(A+B)-1}=\frac{\cos A-\cos B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B-1}$$

Calculons chaqu'un des termes par les formules du cosinus :

$$\cos\widehat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{64}{9}c^2+c^2-\frac{49}{9}c^2}{\frac{16}{3}c^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{\widehat{A}=60°}$$

$$\cos\widehat{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\frac{49}{9}c^2+c^2-\frac{64}{9}c^2}{\frac{14}{3}c^2}=-\frac{1}{7}\Rightarrow\widehat{B}=98.21°$$

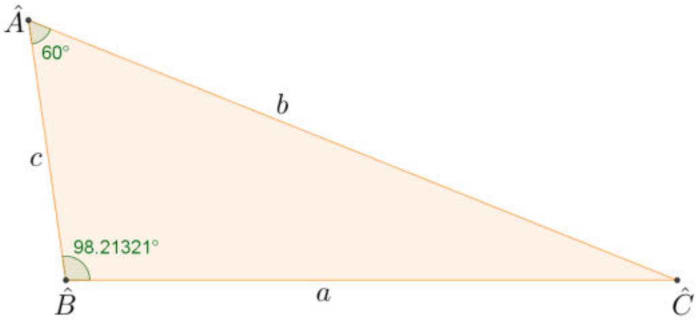
$$\sin\widehat{A}=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ et }\sin\widehat{B}=\sqrt{1-\cos^2\widehat{B}}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

On remplace : $$\frac{\sin\widehat{\frac{A-B}{2}}}{\sin\widehat{\frac{A+B}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{7}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{4\sqrt{3}}{7}-1}=\boxed{-\frac{1}{3}}$$

$$\tan\frac{\widehat{A}}{2}=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Sachant que : $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, on a : $\tan\frac{\widehat{B}}{2}=\frac{\sin\widehat{B}}{1+\cos\widehat{B}}=\frac{4\sqrt{3}/7}{1-\frac{1}{7}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow\frac{\tan\frac{\widehat{A}}{2}}{\tan\frac{\widehat{B}}{2}}=\frac{\sqrt{3}/3}{2\sqrt{3}/3}=\boxed{\frac{1}{2}}$$



Le 1 mars 2021