

Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie

Calcul numérique

TRI 6

EXTRI060 – EXTRI069

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

1 avril 03

EXTRI060 – POLYTECH, UMons, Mons, 1995 à 1998.

EPL, UCL, LLN, juillet 2004 et septembre 2007

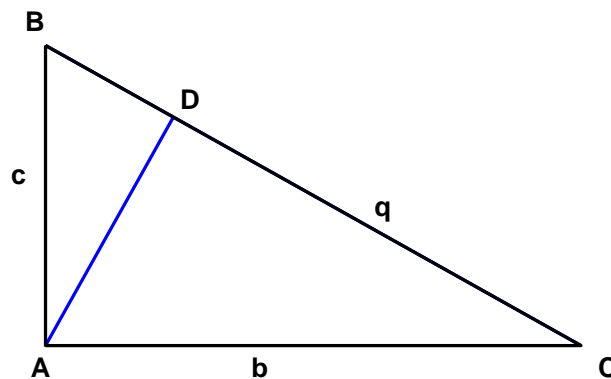
EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2006

POLYTECH, UMons, Mons, septembre 2015.

Dans un triangle ABC rectangle en A , on trace la hauteur AD .

Si on pose $BD = p$ et $DC = q$, démontrer que

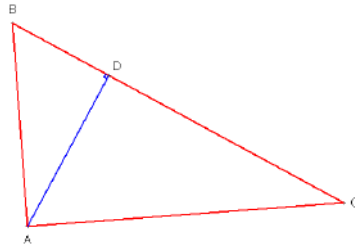
$$\cos 2B = \frac{p-q}{p+q}$$



$$p = c \cos B; \quad q = b \cos C; \quad b = c \tan B; \quad C = \frac{\pi}{2} - B$$

$$\begin{aligned} \frac{p-q}{p+q} &= \frac{c \cos B - b \cos C}{c \cos B + b \cos C} = \frac{\cos B - \frac{b}{c} \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)}{\cos B + \frac{b}{c} \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right)} \\ &= \frac{\cos B - \tan B \sin B}{\cos B + \tan B \sin B} = \frac{\cos^2 B - \sin^2 B}{\cos^2 B + \sin^2 B} = \cos 2B \end{aligned}$$

Méthode proposée par Steve Tumson



$$\cos B = \frac{p}{AB} = \frac{AB}{p+q} \Leftrightarrow AB^2 = p(p+q)$$

$$\sin B = \frac{AC}{p+q} = \frac{AD}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{AD}{AC}(p+q)$$

$$\Rightarrow p(p+q) = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 (p+q)^2 \Leftrightarrow \frac{p}{(p+q)} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2$$

Or

$$\sin C = \frac{AD}{AC} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos B$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p+q} = \cos^2 B \Leftrightarrow \frac{p}{p+q} = \frac{1+\cos 2B}{2} \Leftrightarrow \frac{2p}{p+q} - 1 = \cos 2B \Leftrightarrow \boxed{\frac{p-q}{p+q} = \cos 2B}$$

EXTRI061 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$4 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \sin^2 x = 4$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

METHODE 1

$$4 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \sin^2 x = 4$$

$$4 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \sin^2 x = 4 (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$-\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$$

$$\sin x (\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 0$$

Solutions:

$$1) \sin x = 0 \rightarrow \boxed{x = k \pi}$$

$$2) \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \rightarrow \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{3} + k \pi}$$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle.

METHODE 2

$$4 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \sin^2 x = 4$$

$$4 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) - \sqrt{3} \frac{1}{2} \sin 2x + 3 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) = 4$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 1$$

$$\cos 2x - \tan \frac{\pi}{3} \sin 2x = 1$$

$$\cos 2x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \sin 2x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3}$$

Solutions

$$1) 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k 2\pi \rightarrow \boxed{x = k\pi}$$

$$2) 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k 2\pi \rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{3} + k\pi}$$

EXTRI062 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Démontrer que

$$\tan(a+b) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a \cos a - \sin b \cos b}$$

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\sin a \cos b - \sin b \cos a} \\ &= \frac{\sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a}{(\cos a \cos b - \sin a \sin b)(\sin a \cos b - \sin b \cos a)} = \frac{N}{D}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N &= \sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a = \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - \sin^2 b (1 - \sin^2 a) \\ &= \sin^2 a - \sin^2 b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b)(\sin a \cos b - \sin b \cos a) \\ &= \sin a \cos a \cos^2 b - \sin^2 a \sin b \cos b - \cos^2 a \cos b \sin b + \sin a \sin^2 b \cos a \\ &= \sin a \cos a - \sin b \cos b\end{aligned}$$

**EXTRI063 – POLYTECH, Umons, Mons, questions posées de
1995 à 1998.**

FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

Énoncé de POLYTECH

Démontrer que le triangle ABC est rectangle si on a

$$\tan \frac{B}{2} = \frac{b}{a+c}$$

Énoncé de FACSA

Démontrer que, si dans un triangle l'identité suivante est vérifiée

$$\frac{1}{\sin \beta} + \cot \beta = \frac{a+c}{b}$$

alors ce triangle est rectangle (a, b et c désignent les longueurs des côtés opposés aux angles α, β et γ respectivement).

POLYTECH

$$\text{On a : } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = K$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a+c} = \frac{K \sin B}{K \sin A + K \sin C} = \frac{\sin B}{\sin A + \sin C} = \frac{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}}{2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}}$$

Dans un triangle; $A + B + C = \pi \Rightarrow A + C = \pi - B$

$$\text{Donc } \sin \frac{A+C}{2} = \sin \left(\frac{\pi - B}{2} \right) = \cos \frac{B}{2} \Rightarrow \frac{b}{a+c} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A-C}{2}}$$

$$\text{D'autre part: } \tan \frac{B}{2} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}}$$

$$\text{On en déduit que : } \cos \frac{B}{2} = \cos \frac{A-C}{2} \Rightarrow \pm \frac{B}{2} = \frac{A-C}{2} \Rightarrow \pm B = A - C$$

$$1) \text{ Soit } B = A - C \Rightarrow B = \pi - B - C - C \Rightarrow B + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \text{ Soit } -B = A - C \Rightarrow -B = \pi - B - C - C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

Le triangle ABC est donc rectangle.

FACSA

$$\text{On a } \frac{1}{\sin \beta} + \cot \beta = \frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta}, \text{ or } \cot \frac{\beta}{2} = \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\frac{\sin \beta}{2 \cos \frac{\beta}{2}}} = \frac{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sin \beta} = \frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta}$$

Autrement dit : $\frac{1}{\sin \beta} + \cot \beta = \cot \frac{\beta}{2}$, ce qui nous ramène à l'énoncé de POLYTECH

Modifié le 16 mai 2014

EXTRI064 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Si

$$m \sin B = n \sin(2A + B)$$

Montrer que

$$\tan A = \frac{m-n}{m+n} \tan(A+B)$$

$$m \sin B = n \sin(2a + B) \rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\sin(2A + B)}{\sin B}$$

$$\text{Or dans une proportion : } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$$

$$\rightarrow \frac{m-n}{m+n} = \frac{\sin(2A + B) - \sin B}{\sin(2A + B) + \sin B} = \frac{2 \sin A \cos(A + B)}{2 \sin(A + B) \cos A} = \frac{\tan A}{\tan(A + B)}$$

$$\rightarrow \tan a = \frac{m-n}{m+n} \tan(A + B)$$

EXTRI065 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\cos 2x = \sqrt{2} (\sin^3 x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x)$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \sqrt{2} (\sin^3 x + \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - \sin x \cos^2 x) \\ &= \sqrt{2} (\sin^2 x (\sin x - \cos x) + \cos^2 x (\cos x - \sin x)) \\ &= \sqrt{2} (\sin x - \cos x) (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \sqrt{2} (\sin x - \cos x) \cos 2x\end{aligned}$$

Solutions

$$1) \cos 2x = 0 \rightarrow \boxed{x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi}$$

$$2) \cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \cos x - \tan \frac{\pi}{4} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{3} + k 2\pi$$

$$\rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{12} + k 2\pi} \quad \text{et} \quad \boxed{x = -\frac{7\pi}{12} + k 2\pi}$$

EXTRI066 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Résoudre un triangle sachant que ses angles sont en progression arithmétique, que le produit de leur sinus vaut

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{8}$$

et que le périmètre vaut 12 mètres.

$$A + B + C = 180^\circ$$

Si x est la raison arithmétique, on peut écrire :

$$A = B - x \text{ et } C = B + x \rightarrow B - x + B + B + x = 180^\circ \rightarrow B = 60^\circ$$

D'autre part :

$$\sin A \sin B \sin C = \sin(60 - x) \sin 60 \sin(60 + x)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} [\cos(60 - x - 60 - x) - \cos(60 - x + 60 + x)] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} [\cos(-2x) - \cos 120] = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\cos 2x + \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\cos 2x + \frac{1}{2} \right] = \frac{3 + \sqrt{3}}{8} \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{3 + \sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solutions:

$$1) 2x = 30^\circ \rightarrow x = 15^\circ \rightarrow A = 45^\circ; B = 60^\circ; C = 75^\circ$$

$$2) 2x = -30^\circ \rightarrow x = -15^\circ \text{ (solution à rejeter)}$$

$$\text{De: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a + b + c &= a + \frac{a \sin B}{\sin A} + \frac{a \sin C}{\sin A} = a \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A} \right) \\ &= a \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A} \right) = a \frac{\sin 45 + \sin 60 + \sin 75}{\sin 45} \end{aligned}$$

$$\text{Par conséquent : } 3.5908 a = 12 \rightarrow \boxed{a = 3,342 \text{ m}}$$

De même, on a

$$a + b + c = b \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin B} \right) = c \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin C} \right)$$

$$\text{D'où, on pourra déduire: } \boxed{b = 4.093 \text{ m}} \text{ et } \boxed{c = 4.5650 \text{ m}}$$

EXTRI067 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Montrer que le triangle ABC est rectangle si ses angles vérifient la relation :

$$\tan B = \frac{\cos(C - B)}{\sin A + \sin(C - B)}$$

CE : $\cos B \neq \frac{\pi}{2}$ (A cause de $\tan B$)

$$A + B + C = 180^\circ \rightarrow \sin A = \sin(B + C) \text{ et } \sin(B + C) + \sin(C - B) = 2 \sin C \cos B$$

$$\rightarrow \frac{\cos(C - B)}{\sin A + \sin(C - B)} = \frac{\cos C \cos B + \sin C \sin B}{2 \sin C \cos B}$$

$$\rightarrow \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\cos C \cos B + \sin C \sin B}{2 \sin C \cos B}$$

$$2 \sin C \cos B \sin B = \cos B (\cos C \cos B + \sin C \sin B)$$

$$0 = \cos B (\cos C \cos B - \sin C \sin B)$$

Solutions

1) $\cos B = 0 \rightarrow B = \frac{\pi}{2}$ A rejeter à cause de la CE

2) $\sin B \sin C - \cos C \cos B = 0 \rightarrow \cos(B + C) = 0 \rightarrow B + C = \frac{\pi}{2} \rightarrow A = \frac{\pi}{2}$

Corrigé le 3 avril 06 (Sabine Bouzette)

EXTRI068 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$$

et représenter sur les solutions le cercle trigonométrique.

$$\sin 5x + \sin x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\sin 3x \cos 2x = \cos 2x$$

$$\cos 2x (2\sin 3x - 1) = 0$$

Solutions

a) $\cos 2x = 0 \rightarrow$

$$1) \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi}$$

$$2) \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$$

b) $\sin 3x = \frac{1}{2}$

$$1) \quad 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}}$$

$$2) \quad 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad \boxed{x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}}$$

EXTRI069 – Polytech, UMon, Mons, questions posées de 1995 à 1998. EPL, UCL, Louvain, septembre 2001. FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2011.

Montrer que le triangle ABC est rectangle si ses angles vérifient la relation

$$\sin A - \cos A = \cos B - \sin B$$

METHODE 1

$$\sin A \tan \frac{\pi}{4} - \cos A = \cos B - \sin B \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\sin A \sin \frac{\pi}{4} - \cos A \cos \frac{\pi}{4} = \cos B \cos \frac{\pi}{4} - \sin B \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \left(A + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(B + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos \left(\pi - A - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(B + \frac{\pi}{4} \right)$$

Il vient:

$$\begin{cases} \pi - A - \frac{\pi}{4} = B + \frac{\pi}{4} \\ A + B = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\ C = \pi - A - B = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \pi - A - \frac{\pi}{4} = -B - \frac{\pi}{4} \\ A = \pi + B \\ \text{Impossible car } 0 < A; B < \pi \end{cases}$$

METHODE 2

$$\sin A - \cos A = \cos B - \sin B$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - A \right) - \cos A = \cos B - \cos \left(\frac{\pi}{2} - B \right)$$

$$-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \left(\frac{\pi}{4} - A \right) = -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \left(-\frac{\pi}{4} + B \right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - A \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{4} + B \right)$$

Il vient:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} - A = -\frac{\pi}{4} + B \\ A + B = \frac{\pi}{2} \\ C = \pi - A - B = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{4} - A = \frac{5\pi}{4} - B \\ B - A = \pi \\ \text{Impossible car } 0 < A; B < \pi \end{cases}$$

METHODE 3

$$\sin A - \cos A = \cos B - \sin B$$

$$\sin A + \sin B = \cos A + \cos B$$

$$2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \right] = 0$$

Il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) = 0 \\ \frac{A-B}{2} = \frac{\pi}{2} \\ A-B = \pi \\ \text{Impossible car } 0 < A; B < \pi \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \\ \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \\ A+B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$