Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie Calcul numérique

TRI 7

EXTRI070 – EXTRI079

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 mai 03

EXTRI070 – Polytech, questions posées de 1995 à 1998. Polytech, Umons, Mons, juillet 2015

Enoncé de 1995-1998.

Démontrer l'identité suivante.

$$4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}=\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)$$

Enoncé de juillet 2015

Si $a+b+c+d=2\pi$, vérifier l'identité suivante.

$$4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}=\sin a+\sin b+\sin c+\sin d$$

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\begin{aligned}\sin c-\sin(a+b+c)&=2\sin\frac{c-a-b-c}{2}\cos\frac{c+a+b+c}{2}\\&=-2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b+2c}{2}\end{aligned}$$

Le second membre s'écrit donc :

$$\begin{aligned}&\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c)\\&=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}-2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b+2c}{2}\\&=2\sin\frac{a+b}{2}\left[\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b+2c}{2}\right]\\&=2\sin\frac{a+b}{2}(-2)\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{-(b+c)}{2}\\&=4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}\end{aligned}$$

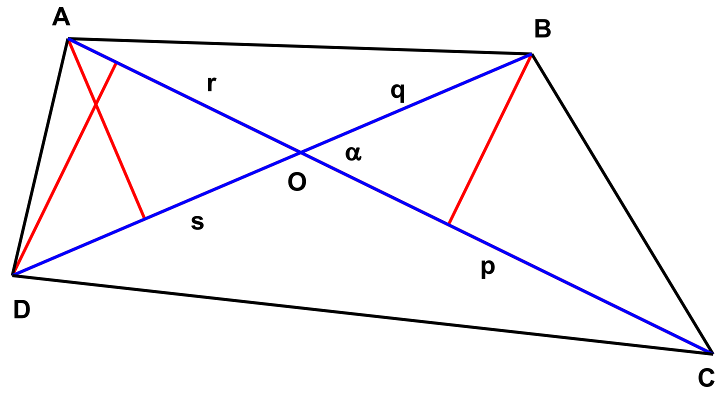
Pour l'énoncé de 2015, il suffit de remarquer que

$$-\sin(a+b+c)=-\sin(2\pi-d)=-\sin(-d)=\sin d$$

Modifié le 16 septembre 2015

EXTRI071 – Polytech, Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Démontrer que la surface d'un quadrilatère est égale à la moitié du produit de ses diagonales par le sinus de l'angle compris entre celles-ci.



Soit $AC = r + p$ et $BD = s + q$

La surface du quadrilatère est donnée par :

$$S_{\text{ABCD}} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}$$

Or

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} qr \sin\alpha$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} pq \sin\alpha$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} ps \sin\alpha$$

$$S_{DOA} = \frac{1}{2} sr \sin\alpha$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad S_{ABCD} &= \frac{1}{2}\sin\alpha.\left(rq + pq + ps + sr\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha.\left[q\left(r+p\right)+s\left(p+r\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha.\left(r+p\right)\left(s+q\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha\,.AC.\,BD \end{aligned}$$

EXTRI072 – Polytech, Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Démontrer que l'expression suivante est indépendante de x

$$E = \cos^2 x - 2\cos a \cos x \cos(a+x) + \cos^2(a+x)$$

$$\begin{aligned}
E &= \cos^2 x + \cos(a+x).\left[\cos(a+x) - 2\cos a \cos x\right] \\
&= \cos^2 x + \cos(a+x).\left[-\cos(a-x)\right] \\
&= \cos^2 x - \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2x) \\
&= \cos^2 x - \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 a + 2\cos^2 x - 1\right) \\
&= \sin^2 a
\end{aligned}$$

EXTRI073 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}.\sin x$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Méthode 1

$$\sin 2x + \cos 2x = \sin 2x + \tan\frac{\pi}{4}\cos 2x = \frac{\sin 2x \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos 2x}{\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{4}} = 2\frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$$

Solutions

$$a)\ 2x + \frac{\pi}{4} = x + k2\pi \qquad \rightarrow\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$b) 2x + \frac{\pi}{4} = (\pi - x) + k2\pi\ \rightarrow\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}$$

Méthode 2

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}.\sin x$$

$$\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \sqrt{2}.\sin x$$

$$2\sin\frac{\pi}{4}.\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.\sin x$$

$$\sqrt{2}.\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.\sin x$$

$$\sqrt{2}.\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.\sin x$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$$

Suite : voir méthode 1

EXTRI074 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Résoudre l'équation trigonométrique suivante :

$$\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{2}$$

et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{3}\frac{1+\cos 2x}{2} + \sin 2x - \sqrt{3}\frac{1-\cos 2x}{2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}$$

Comme $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow$

$$\cos 2x + \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 2x\cos\frac{\pi}{6} + \sin 2x\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}.2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

Solutions

$$a)\ 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \rightarrow x = \frac{5\pi}{24} + k\pi$$

$$b)\ 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \rightarrow x = -\frac{\pi}{24} + k\pi$$

EXTRI075 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Si les côtés a, b, c d'un triangle sont en progression arithmétique, démontrer la relation :

$$\tan\frac{A}{2}\,.\,\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

Si r est la raison de la progression, on peut écrire :

$$\frac{b-r}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{b+r}{\sin C}$$

Or dans une proportion, si $\frac{x}{y}=\frac{z}{w} \rightarrow \frac{x+z}{y+w}=\frac{x}{y}=\frac{z}{w}$

$$\rightarrow \quad \frac{2b}{\sin A+\sin C}=\frac{b}{\sin B}$$

or $\sin A+\sin C=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$

et $\sin B=\sin\left(\pi-A-C\right)=\sin\left(A+C\right)=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$

$$\rightarrow \qquad \frac{2}{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}}$$

$$\rightarrow \qquad 2\cos\frac{A+C}{2}=\cos\frac{A-C}{2}$$

$$\rightarrow 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\rightarrow \quad \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}-3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=0$$

$$\rightarrow \qquad \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

EXTRI076 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Soit

$$S = \cos x + \cos 2x + ...\cos nx \qquad x \in \Re,\ \ x \neq 2k\pi, \quad n \in N, n \neq 0$$

Démontrer que :

$$S \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{nx}{2}\cos\left(\left(n+1\right)\frac{x}{2}\right)$$

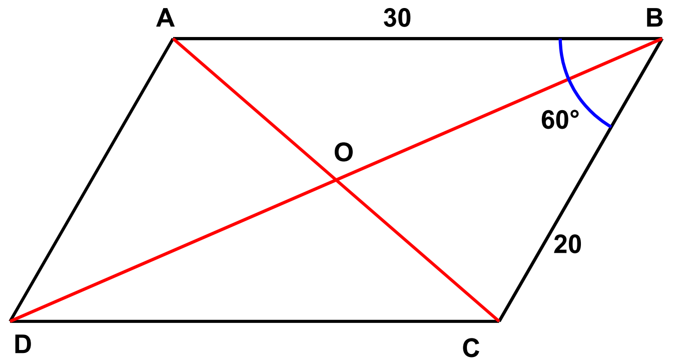
$$\begin{aligned}
S \sin\frac{x}{2} &= \cos x \sin\frac{x}{2} + \cos 2x \sin\frac{x}{2} + \cos 3x \sin\frac{x}{2} + ...\cos nx \sin\frac{x}{2} \\
2S \sin\frac{x}{2} &= \left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) + \left(\sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right) + \\
&\qquad ....+\left(\sin\frac{\left(2n+1\right)x}{2} - \sin\frac{\left(2n-1\right)x}{2}\right) \\
&= \sin\frac{\left(2n+1\right)x}{2} - \sin\frac{x}{2} \\
&= 2\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{\left(n+1\right)x}{2}
\end{aligned}$$

EXTRI077 – Bruxelles, juillet 2000.

Dans le parallélogramme ABCD, on a

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 30 \quad , \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = 30 \quad , \quad \text{et} \quad B = 60°$$

Calculer la longueur des diagonales $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ et $\left|\overrightarrow{BD}\right|$, l'aire du parallélogramme et le cosinus de l'angle formé par les diagonales.



$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 30^2 + 20^2 - 2\times30\times20\times\cos 60 \rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = 26.4575$$

$$\left|\overrightarrow{DB}\right|^2 = 30^2 + 20^2 - 2\times30\times20\times\cos 120 \rightarrow \left|\overrightarrow{DB}\right| = 43.5890$$

Aire : $S = 30\times20\times\sin 60 = 519.6152$

$$\left|\overrightarrow{OB}\right| = 21.7945 \qquad \left|\overrightarrow{OA}\right| = 13.2288$$

$$30^2 = 21.7945^2 + 13.2288^2 - 2\times21.7945\times13.2288\times\cos AOB$$

$$\rightarrow \cos AOB = -0.4336 \qquad \rightarrow \quad \overline{AOB} = 115.693$$

Modifié le 19 juin 2008 (Anthony Bertagno)

EXTRI078 – Bruxelles, juillet 2000.

Résoudre et discuter, suivant les valeurs réelles de a, le système d'équations (les inconnues sont x et y).

$$\begin{cases} \left(\cos^2 a\right)x + \left(\sin^2 a\right)y = \sin a \\ \left(\sin^2 a\right)x + \left(\cos^2 a\right)y = \cos a \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos^2 a & \sin^2 a \\ \sin^2 a & \cos^2 a \end{vmatrix} = \cos^4 a - \sin^2 = \left(\cos^2 a - \sin^2 a\right)\left(\cos^2 a + \sin^2 a\right) = \cos 2a$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \sin a & \sin^2 a \\ \cos a & \cos^2 a \end{vmatrix} = \sin a \cos a \left(\cos a - \sin a\right) = \sin 2a \left(\cos a - \sin a\right)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \cos^2 a & \sin a \\ \sin^2 a & \cos a \end{vmatrix} = \cos^3 a - \sin^3 a = \left(\cos a - \sin a\right)\left(\cos^2 + \sin a \cos a + \sin^2 a\right)$$

$$= \left(\cos a - \sin a\right)\left(1 + \frac{\sin 2a}{2}\right)$$

Etudions Δ

$\cos 2a = 0 \ \rightarrow 2a = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad a = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$

$a)\ k = 0, \quad a = +\frac{\pi}{4}$

Le système devient : $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{2} - x$

$b)\ k = 1, \quad a = \frac{3\pi}{4} \quad \rightarrow$ Système impossible

$c)\ k = 2, \quad a = \frac{5\pi}{4} \quad \rightarrow \quad y = -\sqrt{2} - x$

$d)\ k = 3, \quad a = \frac{7\pi}{4} \quad \rightarrow$ Système impossible

Dans les autres cas : $\begin{cases} x = \dfrac{\sin a \cos a}{\cos a + \sin a} \\ y = \dfrac{1}{2}\dfrac{2 + \sin 2a}{\cos a + \sin a} \end{cases}$

EXTRI079 – Bruxelles, septembre 2000.

Démontrer que si A, B, C sont les mesures des angles d'un triangle non rectangle alors.

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$\tan A + \tan B + \tan c = \tan a \tan B \tan C$

$\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin A}{\cos A} \frac{\sin B}{\cos B} \frac{\sin C}{\cos C}$

$\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B = \sin A \sin B \sin C$

Réarrangeons le premier membre :

$(\sin A \cos B + \sin B \cos A)\cos C + \sin C \cos A \cos B$

$= \sin(A+B)\cos(\pi - (A+B)) + \sin C \cos A \cos B$

$= -\sin(\pi - C)\cos(A+B) + \sin C \cos A \cos B$

$= -\sin C(\cos A \cos B - \sin A \sin B) + \sin C \cos A \cos B$

$= \sin A \sin B \sin C$