Exercices résolus de mathématiques.

Trigonométrie
Calcul numérique

TRI 9

EXTRI090– EXTRI099

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Janvier 04

EXTRI090 – Louvain, juillet 1999.

Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} \sin y \, . \, \sin y = 0.25 \\ \cos x \, . \, \cos y = 0.75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \, . \, \sin y = 0.25 \\ \cos x \, . \, \cos y = 0.75 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin x \text{ et } \sin y \text{ sont de même signe} \\ \cos x \text{ et } \cos y \text{ sont de même signe} \end{cases}$$

Donc x et y appartiennent tout deux soit au premier quadran, soit au troisième quadran.

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x \, . \, \cos y + \sin y \, . \, \sin y = 1 \\ \cos x \, . \, \cos y - \sin y \, . \, \sin y = 0.5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = 0.5 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - y = 2k\pi \\ x + y = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \boxed{x = y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{et} \quad x = y = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$$

EXTRI091 – Louvain, juillet 1999.

Calculer les angles d'un triangle , sachant que :

$$A = 60° \quad \text{et} \quad a = (b-c)\sqrt{3}$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \;\rightarrow\; 3(b-c)^2 = b^2 + c^2 - bc$

$\rightarrow\; 3(b-c)^2 = (b-c)^2 + bc \;\rightarrow\; (b-c)^2 = \dfrac{bc}{2} = \dfrac{a^2}{3}$

$\rightarrow\; c = \dfrac{2a^2}{3b} \;\rightarrow\; \left(b - \dfrac{2a^2}{3b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{3} \rightarrow b - \dfrac{2a^2}{3b} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$\rightarrow\; 3\sqrt{3}b^2 - 3ab - 2\sqrt{3}a^2 = 0 \rightarrow 3b^2 - \sqrt{3}ab - 2a^2 = 0$

$\rightarrow\; b = \dfrac{\sqrt{3}a \pm \sqrt{3a^2 + 24a^2}}{6} = (1 \pm 3)\dfrac{\sqrt{3}a}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ car $b > 0 \rightarrow\; c = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$

Et on constate que : $c^2 + a^2 = \dfrac{a^2}{3} + a^2 = \dfrac{4a^2}{b^2} = b^2$

Autrement dit le triangle est rectangle en B

$\rightarrow\; \boxed{A = 60° \qquad B = 90° \qquad C = 30°}$

EXTRI092 – Louvain, juillet 1999.

La voisine d'Emile lui a demandé conseil pour éclairer sa terrasse (plane et horizontale) de 5 m sur 2.5 m. Il désire la faire en plaçant un spot de type rectangulaire à une certaine hauteur sur un mur vertical de 6 m de haut par rapport au plan de la terrasse, parallèle au long côté de celle-ci, et situé à 2 m en retrait de ce côté.

Emile a trouvé chez l'électricien de son quartier une famille de spots rectangulaires, définie par deux angles d'ouverture. Trois types de spots sont disponibles :

Type de spot	Plan transversal. Ouverture verticale.	Plan longitudinal. Ouverture horizontale ;
FEH 500	2 x 15°	2 x 23°
FEH 1000	2 x 11°	2 x 30°
FEH 1500	2 x 12°	2 x 35°

On supposera que le sommet de la pyramide coïncide avec le point de fixation du spot, dans le plan du mur. Le grand côté est horizontal. L'axe de la pyramide peut être incliné dans le plan vertical perpendiculaire au mur, de 0° (axe vertical vers le sol) à 90° (axe horizontal) autour du point de fixation.

Aidez-le à choisir un spot, pour lequel vous déterminez la hauteur du point de fixation et l'angle d'inclinaison de l'axe de la pyramide, pour éclairer la terrasse, sans trop en déborder (plus la surface totale éclairée sera grande, moins forte sera la lumière).

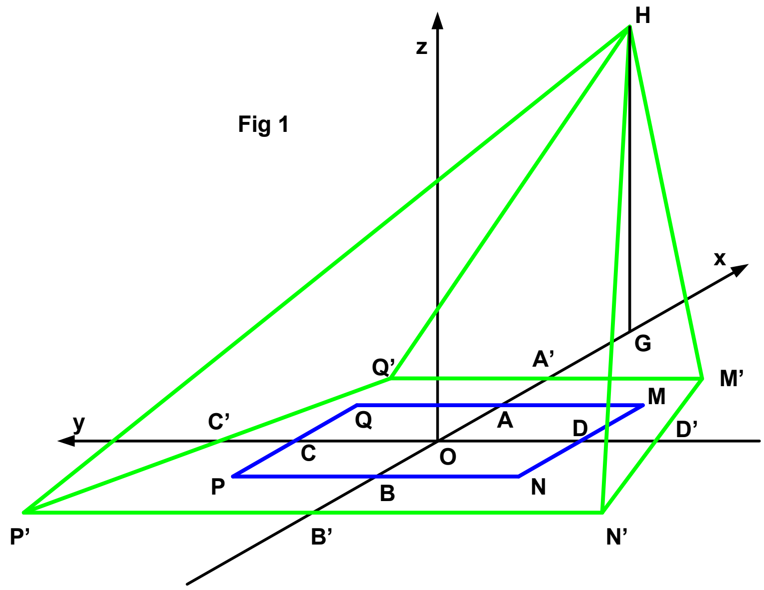
Déterminez, en justifiant votre réponse :

1. La forme géométrique de la zone éclairée dans le plan de la terrasse.
2. Le type de spot choisi
3. La hauteur de fixation
4. L'angle de fixation
5. L'angle d'inclinaison.
6. Les dimensions de la zone éclairée dans le plan de la terrasse

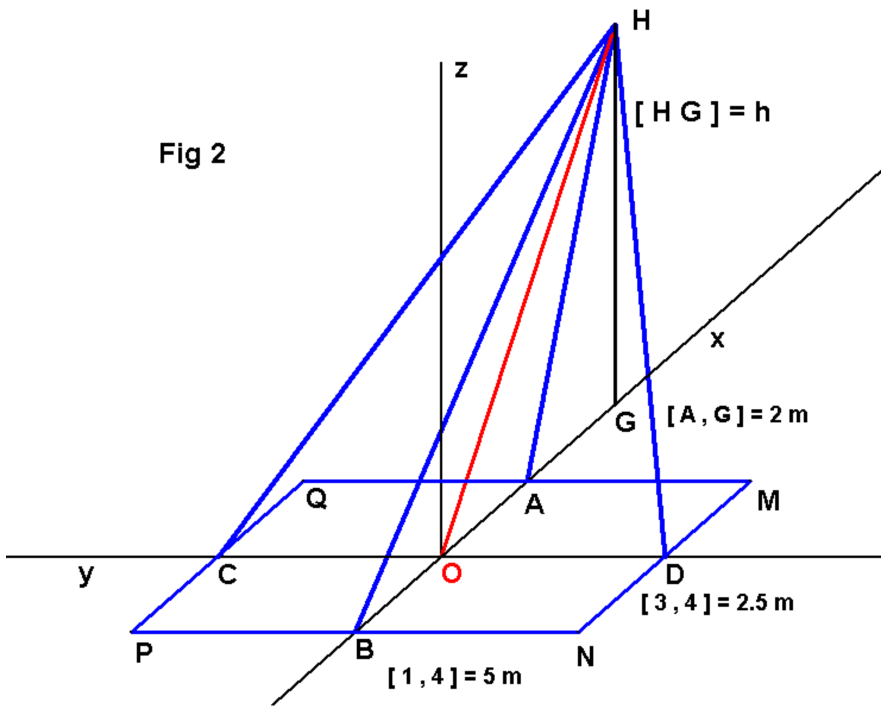
NOTE : Il existe probablement plus d'une solution. On ne vous demande pas la meilleure, mais bien de proposer une solution acceptable et satisfaisant aux spécifications, dans le temps imparti.

Remarque importante :

Il conviendra d'abord de bien présenter graphiquement, et aussi clairement que possible, ce que l'on désire déterminer. Ensuite, on établira une stratégie de recherche de la solution. Enfin, on décrira clairement les calculs qui permettent d'obtenir la solution. Des résultats intermédiaires permettent de repérer d'éventuelles erreurs, et aident à l'évaluation de la réponse.



La forme éclairée est un trapèze isocèle avec la petite base du côté du projecteur H et parallèle au mur. (Fig 1)



Pour simplifier, supposons que le centre de la terrasse O est dans l'axe de la pyramide de sommet H.

Soit h la hauteur du spot.

On a les coordonnées suivantes: (voir Fig 2)

$A:(1.25;0;0)$ $\quad B:(-1.25;0;0)$ $\quad C:(0;2.5;0)$ $\quad D:(0;-2.5;0)$

$H:(3.25;0;h)$ $\quad G:(3.25;0;\ )$

Ce qui permet de définir les vecteurs :

$\overrightarrow{HA}:(2;0;h)$ $\quad \overrightarrow{HB}:(5;0;h)$ $\quad \overrightarrow{HC}:(3.25;-2.5;h)$ $\quad \overrightarrow{HD}:(3.25;2.5;h)$

Soit α l'ouverture pour éclairer le segment AB (Plan transversal)

Soit β l'ouverture pour éclairer le segment CD (Plan longitudinal)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}}{\left\|\overrightarrow{HA}\right\|.\left\|\overrightarrow{HB}\right\|} = \frac{10+h^2}{\sqrt{4+h^2}\sqrt{25+h^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HD}}{\left\|\overrightarrow{HC}\right\|.\left\|\overrightarrow{HD}\right\|} = \frac{4.3125+h^2}{16.8125+h^2}$$

On peut donc construire le tableau suivant (avec une bonne machine à calculer cela ne prend que quelques minutes - Vous ne disposez pas d'Excel à l'examen !!)

$h\,(m)$	α	β	Choix possible	Angles d'ouveture
1.5	69.86	20.17	FEH 500	70/24
2	66.46	23.20		
2.5	62.74	24.78		
3	58.95	25.35	FEH 1000	60/22
3.5	55.26	25.36		
4	51.75	24.78		
4.5	48.49	24.05		
5	45.49	23.20	FEH 500	46/30
5.5	42.74	22.29		
6	40.24	21.37		

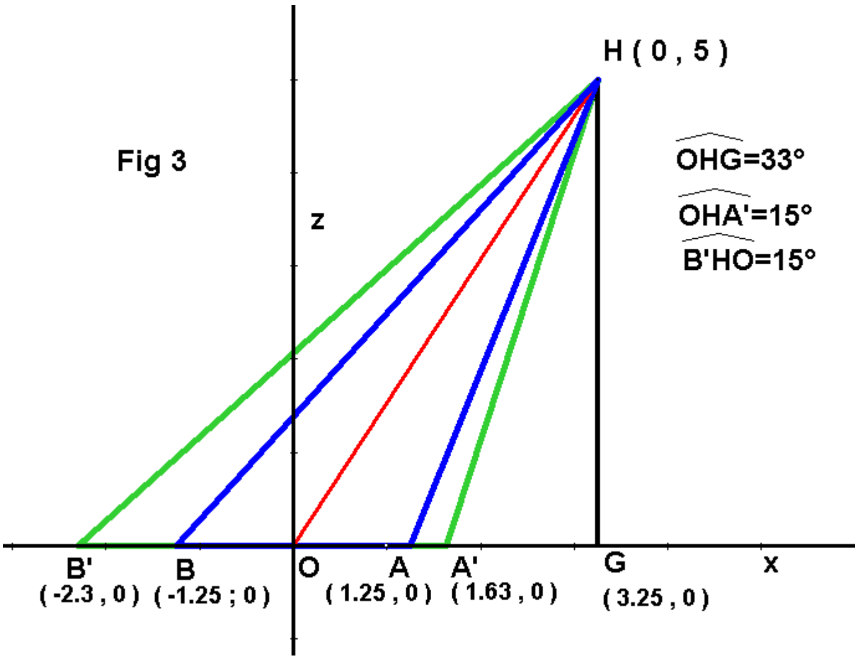
Discussion

1) FEH 1500 placé à 1.5 m de hauteur : manifestement trop bas car il va éblouir.

2) FEH 1000 placé à 3 m. Bonne hauteur mais manque d'ouverture dans le plan transversal. C'est un bon choix.

3) FEH 500 placé à 5 m. La zone sera entièrement éclairée.
Si le voisin à une échelle adéquate et n'a pas le vertige (Il faut parfois changer l'ampoule), ce peut être un bon choix.

Fig 3



Prenons le cas $h = 5\ m$.

On considère toujours que HO est l'axe de la pyramide.

A) Calculons les extrémités A' et B' de la zone éclairée dans le plan transversal : (Voir Fig 3)

$$\widehat{OHG} = \text{arc tan}\frac{3.25}{5} = 33° \text{ (C'est l'inclinaison du spot)}$$

$$\widehat{A'HG} = \widehat{OHG} - \widehat{OHA} = 33 - 15 = 18° \quad \to \quad A'G = 5\tan 18 = 1.625\ m$$

$\to$ Coordonnées de $A' : (1.625; 0; 0)$

De même $\widehat{B'HG} = 33 + 15 = 48° \quad \to \quad B'G = 5\tan 48 = 5.553$

$\to \ B' : (-2.3; 0; 0)$

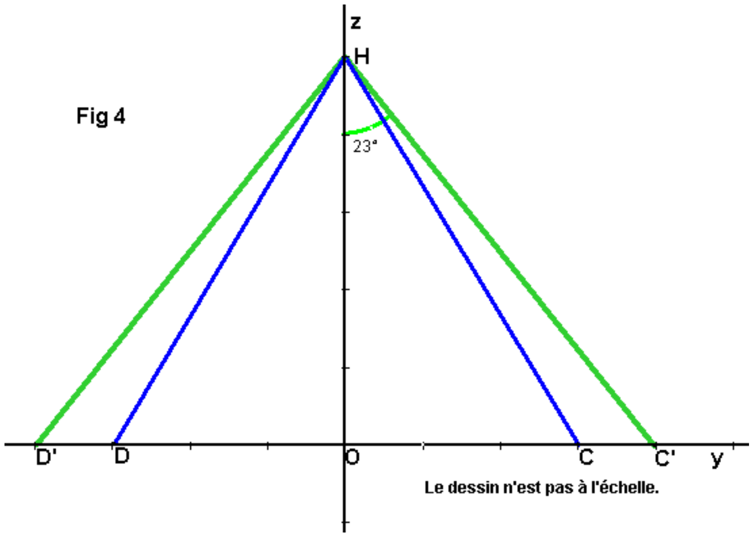


Fig 4

B) Dans le plan longitudinal, on aura (Fig 4)

$$\left\|\overrightarrow{OH}\right\| = \sqrt{3.25^2 + 5^2} = 5.963\ m \quad \to \quad OC' = 5.963\tan 23 = 2.531\ m$$

$\to \ C' : (0; 2.531; 0). \quad \to \quad D' : (0; -2.531; 0)$

Détermination de la zone éclairée.

Il faut déterminer M', point de percée de la droite $Q'M'$ d'équation

$\begin{cases} x = 1.625 \\ z = 0 \end{cases}$ dans le plan $N'HM'$ qui forme une des faces de la pyramide.

Pour établir l'équation de ce plan il suffit de remarquer qu'il est perpendiculaire au plan médian $C'HD'$, donc il est parallèle au vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OD'}$.

Donc le vecteur $\vec{n} = \vec{v} \wedge \overrightarrow{HD'}$ est le vecteur normal au plan $N'HM'$

Et comme ce plan passe par D', il est complètement déterminé.

$$\vec{v} = \overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{OD'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3.25 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (5; 0; -3.25)$$

$$\overrightarrow{HD'} : (3.25; 2.53, 5) \;\rightarrow\; \vec{n} = \vec{v} \wedge \overrightarrow{HD'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & -3.25 \\ 3.25 & 2.53 & 5 \end{vmatrix} = (8.22; -35;563; 12.65)$$

$\rightarrow$ Le plan $M'HN' \equiv 8.22x - 35.56y + 12.65z = d$ passe par D' $\rightarrow$ $d = 89.973$

$\rightarrow$ $M'HN' \equiv 8.22x - 35.56y + 12.65z = 89.973$

$\rightarrow$ $M' : (1.625; -2.153; 0)$ $\quad N' : (-2.3; -3.062; 0)$

$Q' \; : (1.625; 2.153; 0)$ $\quad P' \; : (-2.3; 3.062; 0)$

La zone éclairée est déssinée à la Fig 5.

Surface éclairée : $S_E = (2.153 + 3.062)(1.625 + 2.3) = 20.468\, m^2$

Surface de la terrasse $\mathrm{S_T} = 12.5\, m^2$

$\rightarrow \dfrac{S_E}{S_T} = 1.63$ Pas fameux. Comment faire mieux?

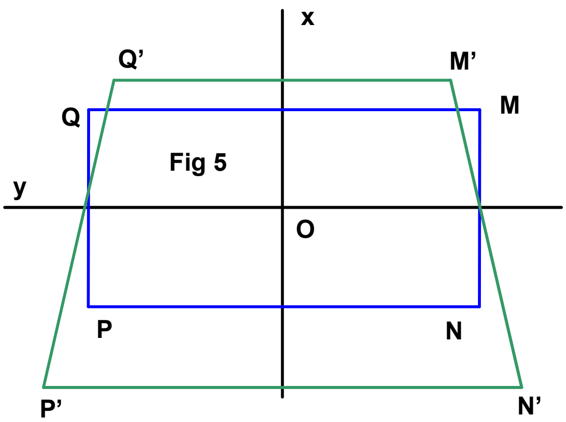
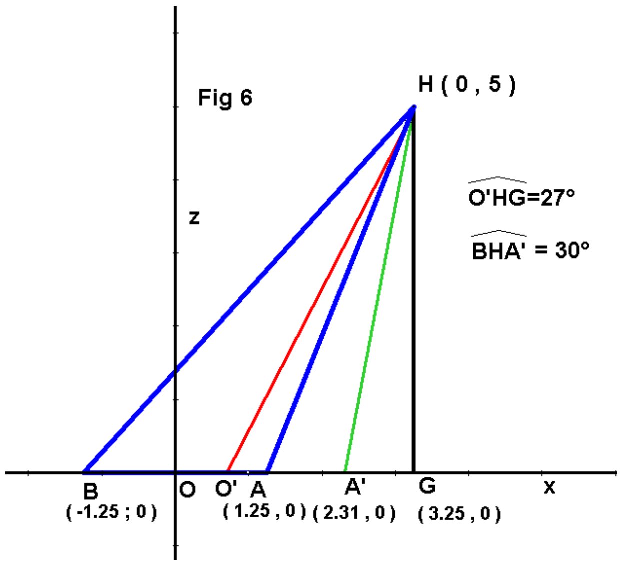


Fig 5

Si vous êtes arrivé jusqu'ici dans le temps qui vous est impartis, c'est vraiment très bien. Félicitations.
Pourtant, nous allons creuser un peu plus pour voir si on peut améliorer notre rapport S_E/S_T.
Une possibilité est de changer l'angle d'inclinaison de façon à faire coïncider *PN* et *P'N'*. (Fig 6).
L'axe de la pyramide se déplace en *O'*.



$\widehat{BHG} = \arctan\frac{4.5}{5} = 42° \rightarrow \widehat{A'HG} = 12° \rightarrow A'G = 5\tan 12 = 1.062\ m$

$\rightarrow A':(2.31;\,0;\,0)$

Inclinaison du spot : $\widehat{O'HG} = 12 + 15 = 27°$

$\rightarrow OO' = 3.25 - 5\tan 27 = 0.7 \rightarrow O':(0.7;\,0;\,0) \rightarrow \overrightarrow{O'H}:(2.55;\,0;\,5)$

$\rightarrow \left\|\overrightarrow{O'H}\right\| = 5.6127 \rightarrow O'D' = 5.6127\tan 23 = 2.38\ m$

$$\vec{v} = \overrightarrow{O'H} \wedge \overrightarrow{OD'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2.55 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (5;\,0;\,-2.55)$$

$$\overrightarrow{HD'}:(3.25;\,2.38;\,5) \rightarrow \vec{n} = \vec{v} \wedge \overrightarrow{HD'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & -2.55 \\ 3.25 & 2.38 & 5 \end{vmatrix} = (6.07;\,-33.29;\,11.912)$$

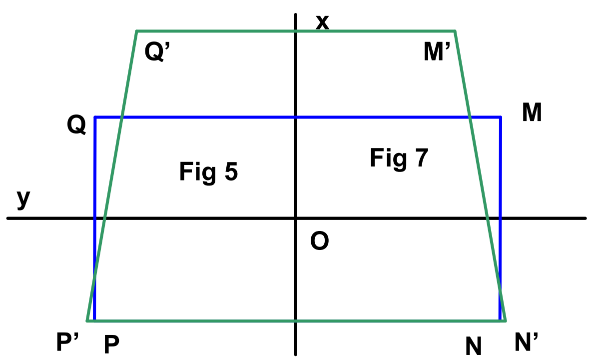
$d = 79.304 \rightarrow$ Plan $M'HN' \equiv 6.07x - 33.29y + 11.912z = 79.304$

$M':(2.31;\,-1.96;\,0)$ $N':(-1.25;\,-2.565;\,0)$

$P':(2.31;\,1.96;\,0)$ $Q':\,(-1.25;\,2.565;\,0)$

$\rightarrow S_E = 16.1\,m^2 \rightarrow \frac{S_E}{S_T} = 1.29$ Nettement mieux, mais il faut éclairer les abords de NM. On chosira donc un angle d'inclinaison entre 27 et 33°.

Par exemple : 30°



EXTRI093 – Louvain, septembre 1999.

Calculer

$$\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{8}$$

$$\tan x=\tan\left[\left(\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{5}\right)+\left(\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{8}\right)\right]$$

$$=\frac{\tan\left(\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{5}\right)+\tan\left(\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{8}\right)}{1-\tan\left(\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{5}\right).\tan\left(\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{8}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}.\frac{1}{5}}+\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}.\frac{1}{8}}}{1-\left(\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}.\frac{1}{5}}\right).\left(\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}.\frac{1}{8}}\right)}=\frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}.\frac{3}{11}}=1\quad\rightarrow\quad\boxed{x=\pi}$$

EXTRI094 – Louvain, septembre 1999.

Sachant que

$$\sin x+\sin a=1$$

résoudre l'équation en x suivante

$$\cos 2x+\cos 2a=1$$

et représenter sur le cercle trigonométrique.

$$\begin{cases}\sin x+\sin a=1\\ \cos 2x+\cos 2a=1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\sin a=1-\sin x\\ 1-2\sin^2 x+1-2\sin^2 a=1\end{cases}$$

$$\rightarrow 1-2\sin^2 x-2(1-\sin x)^2=0 \rightarrow 4\sin^2 x-4\sin x+1=0$$

$$\rightarrow 4\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2=0 \rightarrow \boxed{\begin{cases}x=30°+2k180°\\ x=150°+2k180°\end{cases}}$$

EXTRI095 – Louvain, septembre 1999.

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \sin x = \cos 2y \\ \sin 2x = \cos y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \cos 2y \\ \sin 2x = \cos y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2y\right) \\ \sin 2x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) \end{cases}$$

Comme des angles supplémentaires ont mêmes sinus, nous avons 4 cas à considérer

$$1) \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} - 2y + 2k\pi \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} - y + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} - 2y + 2k\pi \\ \pi - 4y + 4k\pi = \dfrac{\pi}{2} - y + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ y = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + 2y + 2k\pi \\ 2x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + y + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{4k\pi}{3} \\ y = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

En cherchant un peu, on trouve que les cas (1) et (2) peuvent se mettre

sous la forme $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ y = \pm\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}\right) \end{cases}$

Regardons maintenant les autres cas.

3) $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} - 2y + 2k\pi \\ 2x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + y + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{6k\pi}{5} \\ y = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + 2y + 2k\pi \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} - y + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{6k\pi}{5} \\ y = -\left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}\right) \end{cases}$

Les cas (3) et (4) se mettent donc sous la forme : $\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{6k\pi}{5} \\ y = \pm\left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}\right) \end{cases}$

<u>Conclusions</u> : Les solutions sont :

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ y = \pm\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{6k\pi}{5} \\ y = \pm\left(\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}\right) \end{cases}}$$

EXTRI096 – Louvain, septembre 1999.

Dans un triangle ABC, l'angle $C = 120°$. Calculer l'angle B, sachant que :

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \;\rightarrow\; c^2 = \left[\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + 1\right]b^2 - 2\frac{\sqrt{3}-1}{2}b^2\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\rightarrow\; c = b\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\rightarrow\; b^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 b^2 + \frac{3}{2}b^2 - 2\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{3}-1}{2}b^2\cos B$$

$$\rightarrow\; \cos B = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; \boxed{B = 45°}$$

EXTRI097 – Louvain, septembre 1999.

Cet été-là, il y avait une magnifique éclipse de soleil, et Emilie a eu bien de la chance de l'observer, munie de lunettes réglementaires. Elle sait que la terre peut en fait s'approximer par une sphère parfaite de 40 000 km de circonférence, et gravite autour du soleil sur une orbite elliptique. La distance terre-soleil peut ainsi varier de 147.1 à 152.2 millions de km. Et ce soleil sera considéré comme une sphère parfaite de 700 000 km de rayon.
L'éclipse de soleil se produit lorsque la lune vient se mettre exactement entre la terre et le soleil : nous allons supposer que les centres des deux sphères correspondantes sont en ligne droite avec le point A d'observation d'Emilie.
Emilie a lu que la lune aussi peut être représentée par une sphère d'un diamètre de 3 476 km, et qu'elle gravite autour de la terre sur une orbite telle que la distance moyenne terre-lune est de 384 402 km.
L'éclipse est tout juste totale en un point donné si les deux disques viennent se superposer parfaitement : bon alignement et même taille depuis le point d'observation. Supposons que cela soit notre cas, et que le soleil est à ce moment au plus loin de sa trajectoire par rapport à la terre.

Pouvez-vous déterminer dans ce cas précis :

- L'angle sous lequel est vu le diamètre du soleil
- La distance exacte terre-lune pour la coïncidence des deux disques (ce ne sera pas la valeur moyenne…)

Au même instant, Emilie téléphone (sur son GSM) à un ami qui se trouve quelque part en mer à 100 km d'elle et regarde également le soleil : pensez-vous que lui voit une éclipse totale ?
Sinon, pouvez-vous estimer :

- l'écart entre les centres des deux cercles (lune et soleil) qu'il devrait voir, en pourcentage du rayon de ces cercles.
- Le pourcentage de surface du soleil qui est caché par la lune (appelé pourcentage d'éclipse).

<u>Conseil pour une question intelligible</u> :

Il conviendra d'abord de bien représenter graphiquement, et aussi clairement que possible, ce que l'on désire déterminer. Ensuite on établira une stratégie de recherche de la solution. Enfin, on décrira clairement les calculs qui permettent d'obtenir la solution. Des résultats intermédiaires permettent de repérer d'éventuelles erreurs, et aident à l'évaluation de la réponse.

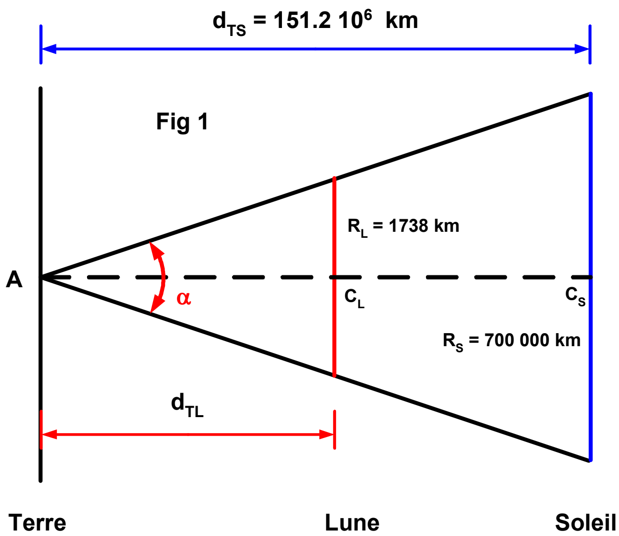


Figure 1

Le soleil est vu sous un angle : $\alpha = 2 \text{ arc tan} \dfrac{R_S}{d_{TS}} = 2 \text{ arc tan} \dfrac{0.7}{151.2} = 0.53052°$

La distance exacte terre-lune pour la coïncidence des deux disques est :

$$\mathrm{d_{TL}} = \frac{R_L}{\tan\alpha} = \frac{R_L\, d_{TS}}{R_S} = \frac{1738 \times 151.2\, 10^6}{700000} = 375408\ km$$

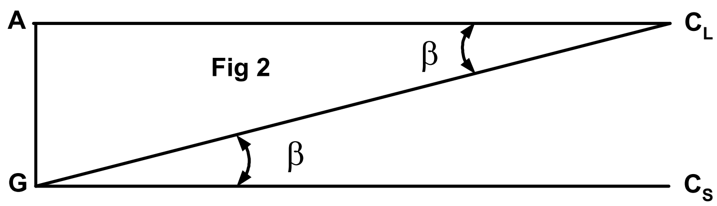


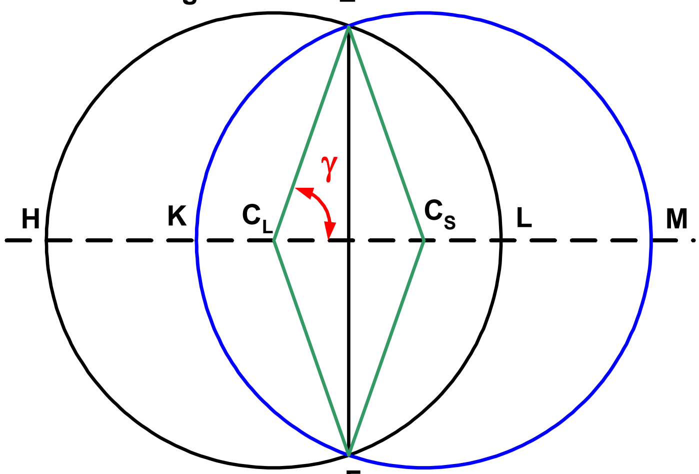
Figure 2

On peut considérer que TC_L et GC_S sont parallèles car le soleil est loin

L'ami d'Emilie voit C_LC_S sous un angle : $\beta = \text{arc tan} \dfrac{TG}{TC_L} = \text{arc tan} \dfrac{100}{375408} = 0.015262°$

En pourcentage du rayon des deux cercles :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{0.015262}{0.53051} = 2.8774\ \%$$



Pour calculer le pourcentage d'éclipse, on ramène le problème à la figure 3, où le rayon des deux cercles est pris égal à $R = 1$.

Donc $\dfrac{C_L C_S}{2R} = \dfrac{\beta}{\alpha} = 0.028774 \;\to\; \gamma = \arctan\dfrac{2}{0.028774} = 89.1756°$

Regardons les différentes aires :

$$S_{EFC_L} = S_{EFC_S} = \frac{1}{2}\sin 2\gamma .\, R = \frac{1}{2}\sin\left(2\times 89.1756\right).1 = 0.014386$$

$$S_{EC_SFK} = \frac{2\gamma}{360}\pi R^2 = \frac{2\times 89.1756}{360}\pi = 1.556408$$

$$S_{EFK} = S_{EC_SFK} - S_{EFC_S} = 1.556408 - 0.014386 = 1.542022$$

On obtient la surface cachée : $S_{EKFL} = 2\; S_{EFK} = 2\times 1.512022 = 3.084044$

Et finalement le pourcentage d'éclipse : $\dfrac{S_{EKFL}}{S_{cercle}} = \dfrac{3.084044}{\pi} = 98.168\%$

EXTRI098 – Louvain, juillet 2000.

Résoudre l'équation en x suivante :

$$2\sin 60°\sin^2 x = \tan 60° - \cos 60°\sin 2x$$

et présenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$2\sin 60°\sin^2 x = \tan 60° - \cos 60°\sin 2x$$

$$2\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2 x = \sqrt{3} - \frac{1}{2}2\sin x\cos x$$

$$\sqrt{3}\left(\sin^2 x - 1\right) = -\sin x\cos x$$

$$-\sqrt{3}\cos^2 x = -\sin x\cos x$$

1) $\cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x = 90° + k180°}$

2) $\sqrt{3}\cos x = \sin x \quad \rightarrow \quad \tan x = \sqrt{3}$

$\quad \rightarrow \quad \boxed{x = 60° + k180°}$

Le lecteur représentera les solutions sur le cercle.

EXTRI099 – Louvain, juillet 2000.

Trouver les valeurs de x qui satisfont à l'inéquation suivante :

$$\cos 2x + \sin x < 0$$

et présenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$$\cos 2x + \sin x < 0 \quad \rightarrow \quad 1 - 2\sin^2 x + \sin x < 0$$

$$\rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x - 1) > 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x > 1 & \text{A rejeter} \\ \sin x < -\dfrac{1}{2} & \rightarrow \quad \boxed{210° + 2k180 < x < 330° + 2k180°} \end{cases}$$